Universität Karlsruhe (TH)

Institut für Programmstrukturen und Datenorganisation (IPD)

Informatik I WS 2003/04 http://www.infoeins.de
Dozent: Prof. Dr.rer.nat. G. Goos goos@ipd.info.uni-karlsruhe.de
Übungsleiter: Tom Gelhausen gelhausen@fzi.de

Musterlösung 4 - (60T / 0P)

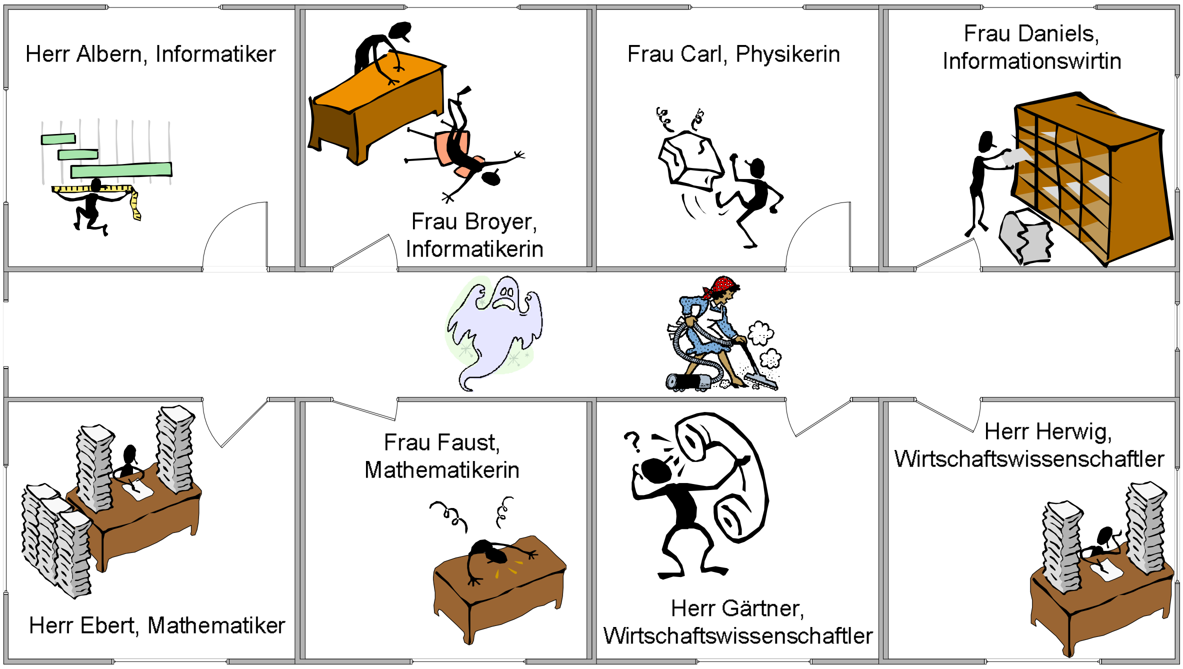
Graphen & Relationen

Ausgabe: 07.11.2003
Abgabe: 14.11.2003
13:30 Uhr

Einwurf im Keller des Informatik-Hauptbaus (Geb. 50.34)

1. Graphen (18T)

Zank-AG: Schauen Sie sich folgenden Grundriss an:



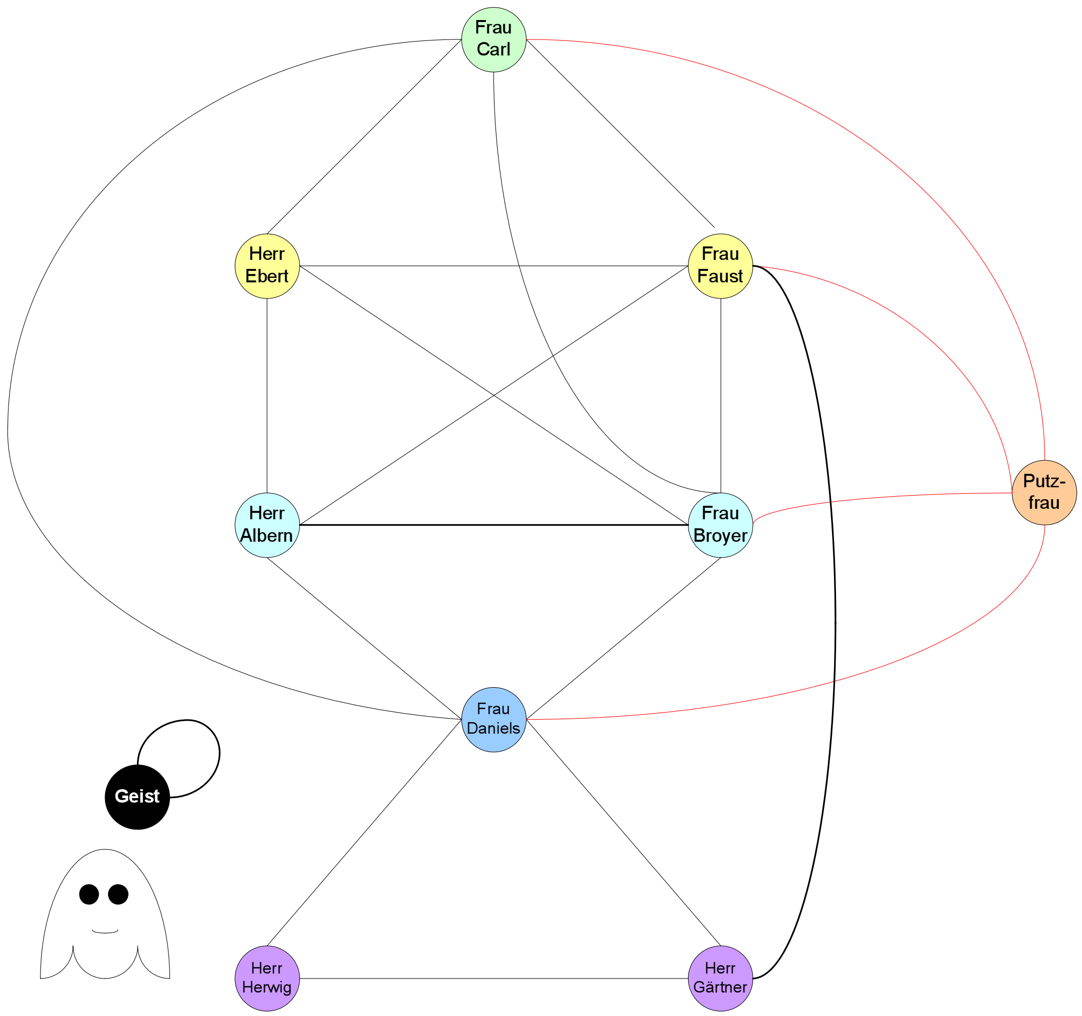
In diesem Gebäude arbeiten Informatiker, Mathematiker, InWis, Physiker und Wiwis. Informatiker sprechen nur mit Mathematikern und InWis, Wiwis sprechen nur mit InWis, Mathematiker sprechen nur mit Physikern und Informatikern, und natürlich unterhalten sich alle auch mit ihresgleichen. Außerdem spricht jeder mit jedem, der in einem Zimmer direkt neben ihm sitzt (Wand an Wand), aber nicht, wenn er dafür über den Gang laufen muss. Ferner tratscht die Putzfrau nur mit Frauen, während der Poltergeist sich nur mit Selbstgesprächen unterhält.

Hinweis: mit „sprechen" ist ein Dialog gemeint, d.h. wenn Mathematiker sich mit Physikern unterhalten, dann unterhalten sich Physiker auch mit Mathematikern.

1.1 Graph (7T)

Erstellen Sie anhand des Gebäudeplans einen Graphen, der zeigt, wer mit wem redet. Stellen Sie dabei - der Übersichtlichkeit halber - die Unterhaltungen der Putzfrau in einer anderen Farbe dar.

Lösung:



1.2 Repräsentationen (5T)

Welche weiteren Darstellungen gibt es ? (1T)
Stellen Sie ihre Lösung zu 1.1 in zwei weiteren Repräsentationen dar. (je 2T)

Lösung:

Weitere Darstellungen sind: formal, Adjazenzliste, Adjazenzmatrix

Formale Darstellung: G = (E, K) mit

E = {Herr **A**lbern, Frau **B**royer, Frau **C**arl, Frau **D**aniels, Herr **E**bert, Frau **F**aust, Herr **G**ärtner, Herr **H**erwig, **P**utzfrau, **Geist**},

K = { {A,B}, {A,D}, {A,E}, {A,F}, {B,C}, {B,D}, {B,E}, {B,F}, {B,P}, {C,D}, {C,E}, {C,F}, {C,P}, {D,G}, {D,H}, {D,P}, {E,F}, {F,G}, {F,P}, {H,G}, {Geist, Geist}}

Adjazenzliste:

A(lbern)	→	B, D, E, F
B(royer)	→	A, C, D, E, F, P
C(arl)	→	B, D, E, F, P
D(aniels)	→	A, B, C, G, H, P
E(bert)	→	A, B, C, F
F(aust)	→	A, B, C, E, G, P
G(ärtner)	→	D, F, H
H(erwig)	→	D, G
P(utzfrau)	→	B, C, D, F
Geist	→	Geist

Adjazenzmatrix:

	A	B	C	D	E	F	G	H	P	Geist
A		1		1	1	1				
B	1		1	1	1	1			1	
C		1		1	1	1			1	
D	1	1	1				1	1	1	
E	1	1	1			1				
F	1	1	1		1		1		1	
G				1		1		1		
H				1			1			
P		1	1	1		1				
Geist										1

1.3 Ecken und Kanten (2T)

Welche Ecken des Graphen haben den höchsten Grad?
Ist der Graph zusammenhängend?

Lösung:

höchster Grad: Frau Daniels, Frau Broyer und Frau Faust (6 Kanten)
zusammenhängend: nein, wegen Geist

1.4 Zyklen (4T)

Wie lange ist der längste einfache Zyklus im Graphen? Geben Sie diesen an.
Gibt es einen hamiltonschen oder eulerschen Kreis? Geben Sie eine Lösung an bzw. begründen Sie kurz, falls es keinen hamiltonschen oder eulerschen Kreis gibt, warum dies so ist.
Was ist der Unterschied zwischen einem hamiltonschen und einem eulerschen Kreis?

Lösung:

Der längste einfache Zyklus geht über 9 Kanten (es gibt mehrere Möglichkeiten), z.B.:
{ (C, E), (E, A), (A, B), (B, D), (D, H), (H, G), (G, F), (F, P), (P, C) }

Es gibt weder hamiltonsche noch eulersche Kreise, da es eine isolierte Ecke gibt.

Unterschied der beiden Kreise:
Hamiltonscher Kreis: Zyklus, der jede **Ecke** genau einmal enthält
Eulerscher Kreis: Zyklus, der über jede **Kante** genau einmal geht (Königsberger Brückenproblem)

2.Floyd-Warshall (22T)

2.1 Durchführung (15T)

Untersuchen Sie mit Hilfe des Floyd-Warshall-Algorithmus, ob ein von einem Mitarbeiter eingestreutes Gerücht alle anderen Mitarbeiter erreichen kann (der Geist steht nicht auf der Gehaltsliste und ist somit kein Mitarbeiter!).

Lösung:
(jede Matrix gibt 3T)

<u>Initialisierungsschritt</u>:

$\sigma_{(init)}$: Der Algorithmus wird über die Adjazenzmatrix und die Einheitsmatrix initialisiert.

$$A_{\sigma_{(init)}} = A + E = \left(\begin{array}{cccccccccc} & A & B & C & D & E & F & G & H & P \\ A & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & & & \\ B & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & 1 \\ C & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & 1 \\ D & 1 & 1 & 1 & 1 & & & 1 & 1 & 1 \\ E & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & & & \\ F & 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & & 1 \\ G & & & & 1 & & 1 & 1 & 1 & \\ H & & & & 1 & & & 1 & 1 & \\ P & & 1 & 1 & 1 & & 1 & & & 1 \end{array}\right)$$

<u>k=1</u>:

$\sigma_{(1)} = \sigma_{(init)} \cup \{ (i, j) \mid i\sigma_{(init)} A \text{ und } A\sigma_{(init)} j \} \rightarrow$ Wege über Ecke A

$$A_{\sigma_{(1)}} = \left(\begin{array}{cccccccccc} & A & B & C & D & E & F & G & H & P \\ A & 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 & & & \\ B & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & 1 \\ C & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & 1 \\ D & 1 & 1 & 1 & 1 & (1) & (1) & 1 & 1 & 1 \\ E & 1 & 1 & 1 & (1) & 1 & 1 & & & \\ F & 1 & 1 & 1 & (1) & 1 & 1 & 1 & & 1 \\ G & & & & 1 & & 1 & 1 & 1 & \\ H & & & & 1 & & & 1 & 1 & \\ P & & 1 & 1 & 1 & & 1 & & & 1 \end{array}\right)$$

<u>k=2</u>:

$\sigma_{(2)} = \sigma_{(1)} \cup \{\, (i, j) \mid i\sigma_{(init)} B$ und $B\sigma_{(init)} j \,\} \rightarrow$ Wege über Ecken $\{A, B\}$

$$A_{\sigma_{(1)}} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F & G & H & P \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ P \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & (1) & 1 & 1 & 1 & & & (1) \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & 1 \\ (1) & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & (1) \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 \\ & & & 1 & & 1 & 1 & 1 & \\ & & & 1 & & & 1 & 1 & \\ (1) & 1 & 1 & 1 & (1) & 1 & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

<u>k=3</u>:

$\sigma_{(3)} = \sigma_{(2)} \cup \{\, (i, j) \mid i\sigma_{(init)} C$ und $C\sigma_{(init)} j \,\} \rightarrow$ Wege über Ecken $\{A, B, C\}$

$$A_{\sigma_{(1)}} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F & G & H & P \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ P \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 \\ & & & 1 & & 1 & 1 & 1 & \\ & & & 1 & & & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

<u>k=4</u>:

$\sigma_{(4)} = \sigma_{(3)} \cup \{\, (i, j) \mid i\sigma_{(init)} D$ und $D\sigma_{(init)} j \,\} \rightarrow$ Wege über Ecken $\{A, B, C, D\}$

$$A_{\sigma_{(1)}} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F & G & H & P \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \\ P \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & (1) & (1) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & (1) & (1) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & (1) & (1) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & (1) & (1) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & (1) & 1 \\ (1) & (1) & (1) & 1 & (1) & 1 & 1 & 1 & (1) \\ (1) & (1) & (1) & 1 & (1) & (1) & 1 & 1 & (1) \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & (1) & (1) & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Die Matrix ist nun eine Eins-Matrix, also kann der Algorithmus beendet werden. Egal wer ein Gerücht streut, es erreicht schließlich jeden in der Zank-AG.

2.2 Beweis (7T)

Wie berechnet sich die Kantenzahl aus der Eckenzahl

a. für einen vollständigen gerichteten Graphen mit reflexiven Kanten?
b. für einen vollständigen ungerichteten Graphen mit reflexiven Kanten?

Formulieren Sie ihre Annahme und beweisen Sie diese mit Hilfe der vollständigen Induktion.

Lösung:

a) Annahme: Kantenzahl = (Eckenzahl)²
x steht für Eckenanzahl

Induktionsanfang: $x = 1$: $k(1) = 1^2 = 1$
Induktionsschritt: $x \Rightarrow x+1$: $k(x+1) = k(x) + 1 + 2x = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$

Überlegung des Kanten-Zuwachses bei Hinzunahme eines weiteren Knotens:
1 Kante, die auf den Knoten verweist, sowie je 2 Kanten auf die bestehenden x Knoten $\Rightarrow$ $1 + 2x$

b) Annahme: Kantenzahl = $\sum_{x=1}^{|E|} x$
x steht für Eckenanzahl

Induktionsanfang: $x = 1$: $k(1) = 1$
Induktionsschritt: $x \Rightarrow x+1$: $k(x+1) = k(x) + x + 1 = \sum_{x=1}^{|E|} x + (x + 1) = \sum_{x=1}^{|E|+1} x$

3 Relationen (14T)

Gegeben sei die Relation $R \subset N \times N$ mit $N = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$, die durch folgende Adjazenzmatrix definiert ist:

	1	2	3	4	5
1	1	0	1	0	1
2	0	1	0	0	0
3	1	0	1	1	0
4	0	0	1	1	1
5	1	0	0	1	1

3.1 Beziehungen (2T)

Geben Sie an, ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind.
(*Hinweis*: die erste Stelle ist der Zeilen-, die zweite der Spaltenindex der Adjazenzmatrix)

2R3
1R1
$4 \neg R3$
$5 \neg R4$

Lösung:

2R3 ist falsch
1R1 ist richtig
$4 \neg R3$ ist falsch
$5 \neg R4$ ist falsch

3.2 Eigenschaften der Relation (4T)

Nennen Sie alle Eigenschaften der Relation R, die unabhängig von der Belegung der Adjazenzmatrix sind (1T).
Welche weiteren Eigenschaften von R lassen sich mit Hilfe der Adjazenzmatrix bestimmen ? Ist R reflexiv, transitiv, symmetrisch, antisymmetrisch ? (2T) Macht dies R zu einer Äquivalenzrelation, einer Halbordnung oder einer Totalordnung ? (1T)

Lösung:
Die Relation R ist eine homogene, zweistellige (binäre) Relation mit endlicher Grundmenge.

R ist reflexiv und symmetrisch, aber nicht antisymmetrisch (da z.B. 1R3 und 3R1) und nicht transitiv (da z.B. 1R3, 3R4 aber nicht 1R4).
Damit ist die Relation R keine der oben genannten Möglichkeiten.

3.3 allgemeine Eigenschaften (8T)

Welchen Einfluss haben Reflexivität, Transitivität, Symmetrie und Antisymmetrie auf die Darstellung einer Relation als Graph bzw. Adjazenzmatrix ?

Lösung:

Eigenschaft	Graph	Matrix $A = a_{(i,j)}$ mit i, j = 1…n
Reflexivität	Jede Ecke hat eine Schleife	$a_{ii} = 1 \; \forall \; i$
Transitivität	Zu je zwei benachbarten Kanten existiert eine direkte Kante gleicher Richtung	$a_{ij} = a_{jk} = 1 \Rightarrow a_{ik} = 1 \; \forall \; i, j, k$
Symmetrie	Nur bidirektionale Kanten (Schleifen sind bidirektional)	$A = A^T$
Antisymmetrie	Nur unidirektionale Kanten und Schleifen	$a_{ij} \cdot a_{ji} = 0$

4. Chomsky-Grammatiken und –Sprachen (6T)

Gegeben sind folgende drei Grammatiken. Bestimmen Sie zu jeder den Typ der Grammatik, die erzeugte Sprache und den Typ der Sprache.

1. $P_1 = \{ S \mapsto aBC,$
   $aB \mapsto C \mid SC,$
   $C \mapsto c \}$

2. $P_2 = \{ S \mapsto aX \mid B,$
   $X \mapsto aX \mid B,$
   $B \mapsto bB \mid b \}$

3. $P_3 = \{ S \mapsto aAb,$
   $aA \mapsto aa \mid aaA$
   $Ab \mapsto b \mid c \mid bB \mid cB$
   $B \mapsto Ab \mid bB \mid cB \}$

Lösung:

1. Grammatik: Typ 0
   erzeugte Sprache: $\mathcal{L} = \{c^{2n} \mid n > 0 \}$
   Sprache: Typ 3

2. Grammatik: Typ 2
   erzeugte Sprache: $\mathcal{L} = \{ a^n b^m \mid n \geq 0, m > 0\}$
   Sprache: Typ 3

3. Grammatik: Typ 0
   erzeugte Sprache: $\mathcal{L} = \{a^+ (b+c)^+\}$
   Sprache: Typ 3