Universität Karlsruhe (TH)

Institut für Programmstrukturen und Datenorganisation (IPD)

Informatik I WS 2003/04 http://www.infoeins.de

Dozent: Prof. Dr.rer.nat. G. Goos goos@ipd.info.uni-karlsruhe.de

Übungsleiter: Tom Gelhausen gelhausen@fzi.de

Übungsblatt 5 - (60T / 0P)

Ordnungen und Verbände

Ausgabe: 14.11.2003

Abgabe: 21.11.2003 13:30 Uhr

Einwurf im Keller des Informatik-Hauptbaus (Geb. 50.34)

1. Halbordnungen und Funktionen (17T)

Sei $A = \{a, b\}$ und $M = \mathcal{P}(A)^3$ das dreifache Kreuzprodukt der Potenzmenge. Weiter sei folgende Halbordnung über M gegeben: $(X_1, X_2, X_3) \sqsubseteq (Y_1, Y_2, Y_3)$ gdw. $X_1 \subseteq Y_1, X_2 \subseteq Y_2, X_3 \subseteq Y_3$

1.1. Grundlagen (6T)

Geben Sie $\mathcal{P}(A)$ sowie ein Element aus M an.

Prüfen Sie, ob folgende Aussagen wahr sind:

a. $(\{a\}, \{b\}, \emptyset) \sqsubseteq (\{a,b\}, \{b\}, \{a\})$
b. $(\{b\}, \{b\}, \emptyset) \sqsubseteq (\{a,b\}, \{a\}, \{a\})$
c. $(\{a\}, \{b\}, \{a,b\}) \sqsubseteq (\{a,b\}, \emptyset, \{a\})$
d. $(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \sqsubseteq (\{a\}, \{b\}, \{a\})$

Welches ist das kleinste Element $\perp$ der Halbordnung? Welches das größte $\top$?

1.2. Eigenschaften der Halbordnung (6T)

Ist obige Halbordnung (i) fundiert, (ii) artinsch, (iii) noethersch, (iv) vollständig? Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen kurz.

1.3 Fixpunkte (5T)

Sei nun zusätzlich Funktion f über M gegeben:

$$f(X_1, X_2, X_3) = (X_2 \setminus \{a\}, X_3 \cup \{b\}, X_1 \cup X_2 \cup \{a\})$$

Ist f (i) monoton, (ii) stetig ? Begründen Sie jeweils Ihre Aussagen kurz.
Finden Sie den kleinsten Fixpunkt der Funktion f.

2. Hassediagramme (15T)

Aus einem Biologiebuch:
„Zum Beispiel teilte er *Säugetiere* in zwei große Gruppen: in solche *mit Zehen* (z.B. Katzen) und solche *mit Hufen*. Die behuften Tiere teilte er weiter in *einhufige* (Pferde), in *zweihufige* (Hornvieh) und in *dreihufige* (Rhinozerosse) ein. Die zweihufigen Säugetiere wurden weiter in drei Gruppen eingeteilt: in *Wiederkäuer mit beständigem Gehörn* (Ziegen u.a.), in *Wiederkäuer, die ihr Gehörn jährlich abwerfen* (Rotwild) und *Nichtwiederkäuer* (Schweine).“

2.1 Halbordnung (8T)

Erstellen Sie aus obigem Text eine Halbordnung, die die Verwandtschaftsbeziehungen zwischen den Tieren verdeutlicht. Die Halbordnung soll dabei als Graph dargestellt werden.

Hinweis 1: alle kursiven Worte gehören zur zu betrachtenden Menge.
Hinweis 2: Denken Sie dabei an die Eigenschaften einer Halbordnung.

2.2 Hassediagramm (5T)

Formen Sie den Graphen aus 2.1 in ein Hassediagramm um. (4T)

Welchen Vorteil hat die Darstellung der Halbordnung als Hassediagramm gegenüber der Darstellung als Graph? (1T)

2.3 Topologisches Sortieren (2T)

Sortieren Sie die Halbordnung topologisch (beginnend mit dem allgemeinsten Element).

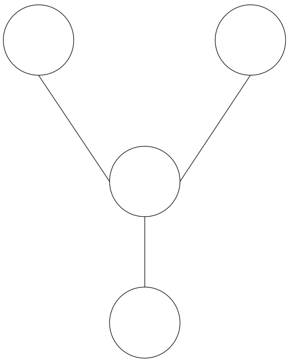
3. Verbände (17T)

3.1 Verbände erkennen (10T)

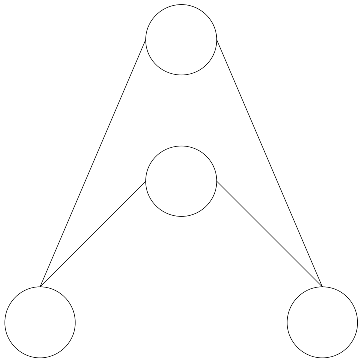
Gegeben sind folgende Diagramme. Untersuchen Sie jeweils, ob es sich um einen oberen/unteren Halbverband oder einen Verband handelt (je 1,5T). Ergänzen Sie, wenn nötig, den Halbverband durch maximal einen Knoten zu einem Verband (je 1,5T).

Sind alle diese Verbände vollständig (kurze Begründung)? (1T)

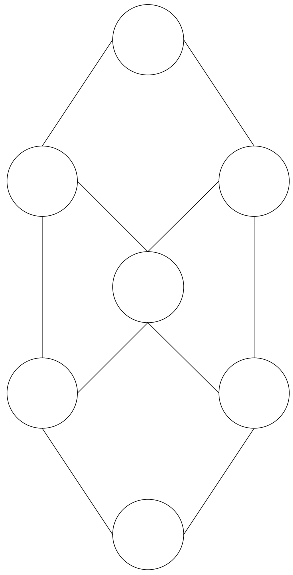
1.



2.



3.



3.2 Zusammenhang zwischen Verbände und Ordnungen (7T)

Gegeben sei ein Halbverband (U, ∧). Zeigen Sie, dass auf U durch $x \leq y$ gdw. $x \wedge y = x$ eine Halbordnung (U, ≤) definiert wird.

Hinweis: Überprüfen Sie dazu die Eigenschaften einer Halbordnung.

4. Ordnungsrelationen (11T)

Welche Eigenschaften muss eine Relation R erfüllen, um eine Ordnungsrelation zu sein? (1T)

Geben Sie an, ob die Relationen auf den jeweiligen Mengen Ordnungsrelationen sind. Wenn ja, weisen Sie **kurz** die Eigenschaften nach und geben Sie an, ob es sich um eine totale Ordnung oder eine Halbordnung handelt. Wenn nein, begründen Sie **kurz** warum nicht.

a. Relation '<' (kleiner als) auf den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$
b. Relation '|' (teilt) auf den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$
c. Relation zwischen natürlichen Personen „ist verwandt mit“.
d. Relation „Ist Mutter von“ bei Menschen.
e. Relation zwischen natürlichen Personen „ist nicht kleiner als“.
f. Relation „ist echte Teilmenge von“ auf der Potenzmenge einer nichtleeren Menge.