Übungen zu Informatik I Wintersemester 03/04

Übungsleiter: Dipl.-Inform. Tom Gelhausen

- Elemente/Konzepte
  - X,Y,Z Objekte, Individuen, repräsentiert durch Terme
  - P(X), Q(Y) Prädikate, Aussagen über Objekte {wahr/falsch}
  - $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ Junktoren mit gleicher Bedeutung wie in AL
  - $\forall, \exists$ Quantoren Q, „Aussagen über Prädikate“
- Syntax
  - Terme
    - Jede Variable $x \in V$ ist ein Term.
    - Wenn f ein n-stelliges Funktionssymbol ist und $t_1, t_2, \ldots, t_n$ Terme sind, dann ist auch $f(t_1, \ldots, t_n)$ ein Term
  - Formeln
    - Wenn P ein n-stelliges Funktionssymbol ist und $t_1, t_2, \ldots, t_n$ Terme sind, dann ist $P(t_1, \ldots, t_n)$ eine (atomare) Formel
    - Wenn F und G Formeln sind, dann auch $\neg F$, $F \vee G$, $F \wedge G$, .. $F \rightarrow G$
    - Wenn F Formel und x Variable, dann ist auch „Qx: F“ Formel

$\forall$ $\exists$

$\forall a: (Q(a) \vee P(a))$

- Bindung durch Quantoren
  - Variable x ist **gebunden** in F wenn F der Form Qx: F‘ $\forall a \forall b\, Q(a) \wedge P(b)$
  - F‘ heißt **Wirkungsbereich**
  - Variable x ist **frei**, wenn sie sich nicht im Wirkungsbereich eines Quantors befindet.
  - Eine Formel heißt **geschlossen**, wenn sie keine freien Variablen enth.
  - Wenn $\{x_1, \ldots, x_n\}$ die Menge der freien Variablen von F ist, dann ist $\forall x_1 \ldots \forall x_n$: F der sog. **All-Abschluß** von F.

$\forall x: \forall y: \exists z\, P(x)$

- Abkürzungen
  - $\forall x,y\exists z: P(x) \vee Q(y) \wedge R(z) \quad \triangleq \quad \forall x: (\forall y: (\exists z: (P(x) \vee Q(y) \wedge R(z))))$
  - $\forall x{\in}G: P(x) \quad \triangleq \quad \forall x: x{\in}G \rightarrow P(x)$

$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

$\forall x \in G \setminus \{\ldots\}$

- **Beispiele**:
  - $\exists x \exists y \forall z: (P(x, y, z) \wedge P(x, z, y) \wedge P(z, y, x))$
  - $\exists x \exists y: (Q(y, x) \wedge Q(x, y) \wedge (\forall z: P(z, y, x)))$
  - $P(x, y, z) \wedge P(x, z, y) \wedge P(z, y, x)$

$\{x \mid P(x)\}_{x \in G}$

Prädikatenlogik – Zusätzliche Regeln

- „Rechenregeln" für das Verschieben von Quantoren
  - F = Qx: F, wenn x in F nicht vorkommt
  - ¬∃x: F = ∀x: ¬F
  - ¬∀x: F = ∃x: ¬F
  - F ∨ Qx: G = Qx: (F ∨ G), wenn x in F nicht vorkommt
  - F ∧ Qx: G = Qx: (F ∧ G), wenn x in F nicht vorkommt
  - ∀x∀y: F = ∀y∀x: F
  - (∃y∀x: F) ⇒ (∀x∃y: F) **aber nicht umgekehrt!**
  - Kollisionsfreie Variablenumbenennungen

F → Qx : G

- Normalformen
  - Eine Formel F ist in pränexer Normalform, wenn F = $Qx_1 \ldots Qx_n$: F‘ und F‘ enthält keine Quantoren
    - Jede prädikatenlogische Formel F kann in eine äquivalente Formel G in pränexer Normalform überführt werden.
  - Eine Formel F ist in Skolemform, wenn F in pränexer Normalform ist und keine Existenzquantoren enthält.
    - Zu jeder prädikatenlogischen Formel F gibt es eine äquivalente Formel G in Skolemform.
- **Beispiel**:

ÜBERDECKUNG

$$F = \forall x \exists y: \big((P(x) \land Q(x, y)) \lor \neg(\forall x: R(x))\big)$$

$$= \forall x \exists y: \big((P(x) \land Q(x, y)) \lor (\exists x: \neg R(x))\big)$$

$$= \forall x \exists y: \big((P(x) \land Q(x, y)) \lor (\exists z: \neg R(z))\big)$$

$$= \forall x \exists y \exists z: (P(x) \land Q(x, y)) \lor \neg R(z))$$

$$= \forall x: (P(x) \land Q(x, sk_y(x))) \lor \neg R(sk_z(x)))$$

$sk_z() = G \qquad sk_y(x) = G(x)$

$sk_x(\ldots)$

alle allquantifizierten Variablen, die vor der exitenzquantifizierten Variable stehen

Name der Variable, die ersetzt wird

$A \wedge 1 = A$
$A \vee 0 = A$

- Wie in AL:
  - Disjunktive Normalform: $\vee_{i=1..n} \wedge_{j=1..m} L_{ij}$
  - Konjunktive Normalform: $\wedge_{i=1..n} \vee_{j=1..m} L_{ij}$
  - jedoch: L_{ij} sind atomare Formeln! Also $P(A) \neq P(B)$!

$P = P$

  - Trick: Erweitere um „∧1” bzw. um „∨0”:
    - $F = F \wedge 1 = F \wedge (\text{Atom} \vee \neg\text{Atom}) = \underbrace{(F \wedge \text{Atom})}_{F \wedge P(A)} \vee (F \wedge \neg\text{Atom})$

$F \wedge P(A) \vee F \wedge \neg P(A)$

- **Beispiel**:

$A(x), B(x), C(x)$

$F = \forall x: ((A(x) \wedge B(x)) \vee \neg C(x))$
$= \forall x: (A(x) \wedge B(x) \wedge C(x)) \vee (A(x) \wedge B(x) \wedge \neg C(x))$
$\vee \neg C(x)$
$= \forall x: (A(x) \wedge B(x) \wedge C(x)) \vee (A(x) \wedge B(x) \wedge \neg C(x))$
$\cancel{\vee (A(x) \wedge B(x) \wedge \neg C(x))} \vee (\neg A(x) \wedge B(x) \wedge \neg C(x))$
$\vee (A(x) \wedge \neg B(x) \wedge \neg C(x)) \vee (\neg A(x) \wedge \neg B(x) \wedge \neg C(x))$
$= \forall x: (A(x) \wedge B(x) \wedge C(x)) \vee (A(x) \wedge B(x) \wedge \neg C(x))$
$\vee (\neg A(x) \wedge B(x) \wedge \neg C(x)) \vee (A(x) \wedge \neg B(x) \wedge \neg C(x)) \vee (\neg A(x) \wedge \neg B(x) \wedge \neg C(x))$

Prädikatenlogik – Beispiel „Der Pferdedieb“

- Gerichtstag auf der Insel der Ritter und Schurken. Die Ritter dieser Insel haben die Eigenschaft, immer die Wahrheit zu sagen, während die Schurken immer lügen.
- In einem Prozess geht es um ein gestohlenes Pferd. Es gibt vier Verdächtige – Andrew, Bruce, Clayton und Edward. Dem Gericht ist unzweifelhaft bekannt, dass genau einer dieser vier der Dieb ist. Die ersten drei sind bereits verhaftet worden, doch Edward konnte nirgendwo aufgestöbert werden. Der Prozess wird deshalb ohne ihn geführt.
- Als erstes fragte der Richter „Wer hat das Pferd gestohlen?“ Er erhielt darauf von den Angeklagten die folgenden Antworten:

Andrew:	„Bruce hat das Pferd gestohlen.“
Bruce:	„Clayton hat das Pferd gestohlen.“
Clayton:	„Edward ist es, der das Pferd gestohlen hat.“

- Doch dann, sehr unerwartet, sagte einer der drei Angeklagten: “Die beiden anderen lügen“.

Beispiel „Der Pferdedieb“ – Aufgabenstellungen

- Einer der drei {A, B, C} ist auf jeden Fall unschuldig. Welcher?
- Einer der beiden übrig gebliebenen {X, Y} soll eine Ja/Nein-Aussage darüber machen, ob der andere ein Ritter ist. Welcher?
- Aus der Aussage lässt sich eindeutig Schlussfolgern, wer der der Pferdedieb ist. Wer ist es?

„Der Pferdedieb" – Formalisierung

- *„Gerichtstag auf der Insel der Ritter und Schurken."*
  - Menge $\mathcal{R}$ der Ritter und Menge $\mathcal{S}$ der Schurken
  - Insel, daher abgeschlossenes, endliches Universum
  - Daher $\mathcal{U} \coloneqq \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$
- *„Die Ritter dieser Insel haben die Eigenschaft, immer die Wahrheit zu sagen, während die Schurken immer lügen."*
  - Zwei Aussagen:
    - Ritter sagen immer die Wahrheit.
    - Schurken lügen immer.
  - Zwei Subjekte: Ritter, Schurken
  - Zwei Prädikate:
    - **W**(X): X sagt (immer) die Wahrheit.
    - ~~**L**(X): X lügt (immer~~).
  - Wir postulieren: **W**(X) ⇔ ¬**L**(X) und **L**(X) ⇔ ¬**W**(X)
    - Wir folgern: $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \varnothing$

„Der Pferdedieb" – Formalisierung

- *„In einem Prozess geht es um ein gestohlenes Pferd. Es gibt vier Verdächtige – Andrew, Bruce, Clayton und Edward."*
  - Vier Objekte: $A \coloneqq$ Andrew, $B \coloneqq$ Bruce, $C \coloneqq$ Clayton, $E \coloneqq$ Edward
  - Wir postulieren: $A \in \mathcal{U}$, $B \in \mathcal{U}$, $C \in \mathcal{U}$, $E \in \mathcal{U}$!
  - Neues Prädikat: $\mathbf{V}(X)$: X ist verdächtig.
  - Wir definieren die Menge der Verdächtigen $\mathcal{V} \coloneqq \{X \in \mathcal{U} \mid \mathbf{V}(X)\}$

- *„Dem Gericht ist unzweifelhaft bekannt, dass genau einer dieser vier der Dieb ist."*
  - Neues Prädikat: $\mathbf{D}(X)$: X ist der Dieb.
  - Neue Formel: $\exists X \in \mathcal{V}: \mathbf{D}(X)$ $\exists!$
  - Erweiterte Formel: $\exists X \in \mathcal{V}: (\mathbf{D}(X) \wedge \neg \exists Y \in \mathcal{V}: (X \neq Y) \wedge \mathbf{D}(Y))$

„Der Pferdedieb" – Formalisierung

- *„Die ersten drei sind bereits verhaftet worden, doch Edward konnte nirgendwo aufgestöbert werden. Der Prozess wird deshalb ohne ihn geführt."*
  - Neues Prädikat: **H**(X): X ist in Haft.
  - Wir definieren die Menge der Inhaftierten $\mathcal{H} := \{X \in \mathcal{U} \mid \mathbf{H}(X)\}$

- *„Als erstes fragte der Richter „Wer hat das Pferd gestohlen?" Er erhielt darauf von den Angeklagten die folgenden Antworten:*
  Andrew: „Bruce hat das Pferd gestohlen."
  Bruce: „Clayton hat das Pferd gestohlen."
  Clayton: „Edward ist es, der das Pferd gestohlen hat."""
  - Neues Prädikat: ~~**G**(X): X hat das Pferd gestohlen?~~
  - Wir postulieren: $\forall X \in \mathcal{U}$ **G**(X) = **D**(X).
  - Wie modellieren wir „A sagt …"?
    - Brauchen wir neue Prädikate?
    - Und wenn er lügt?

„Der Pferdedieb“ – Formalisierung

- *„Als erstes fragte der Richter „Wer hat das Pferd gestohlen?“ Er erhielt darauf von den Angeklagten die folgenden Antworten:*
  Andrew: „Bruce hat das Pferd gestohlen.“
  Bruce: „Clayton hat das Pferd gestohlen.“
  Clayton: „Edward ist es, der das Pferd gestohlen hat.““
  - Lösung: Formeln!
    - $(\mathbf{W}(A) \wedge \mathbf{D}(B)) \vee (\neg\mathbf{W}(A) \wedge \neg\mathbf{D}(B)) \wedge$
      $(\mathbf{W}(B) \wedge \mathbf{D}(C)) \vee (\neg\mathbf{W}(B) \wedge \neg\mathbf{D}(C)) \wedge$
      $(\mathbf{W}(C) \wedge \mathbf{D}(E)) \vee (\neg\mathbf{W}(C) \wedge \neg\mathbf{D}(E))$

- *„Doch dann, sehr unerwartet, sagte einer der drei Angeklagten: “Die beiden anderen lügen“.“*

  $\mathcal{H} = \{x \mid H(x) \wedge x \neq y\}$

  - $\exists X \in \mathcal{H}: \forall Y \in \mathcal{H} \setminus \{X\}: \neg\mathbf{W}(Y) \neq \exists X \in \mathcal{H} \forall Y \in \mathcal{H}: \neg\mathbf{W}(Y) \wedge (X \neq Y)$
  - Aber: $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{U}$ und $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{U} \nRightarrow \mathcal{H} \cap \mathcal{S} = \emptyset$
  - Daher: $\exists X \in \mathcal{H}: \quad ((\mathbf{W}(X) \wedge (\forall Y \in \mathcal{H}: \neg\mathbf{W}(Y) \wedge (X \neq Y)))$
    $\vee \quad (\neg\mathbf{W}(X) \wedge \neg(\forall Y \in \mathcal{H}: \neg\mathbf{W}(Y) \wedge (X \neq Y))))$

Formalisierung „Der Pferdedieb“ – Zusammenfassung

- $\mathcal{U} := \mathcal{R} \cup \mathcal{S}$, $\mathcal{R}$ Menge der Ritter und $\mathcal{S}$ der Schurken und $\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \emptyset$
- Prädikate / Mengen
  - **W**(X): X sagt (immer) die Wahrheit. — $\mathcal{R} = \{X \in \mathcal{U} \mid \mathbf{W}(X)\}$
  - **V**(X): X ist verdächtig. — $\mathcal{V} = \{X \in \mathcal{U} \mid \mathbf{V}(X)\}$
  - **D**(X): X ist der Dieb.
  - **H**(X): X ist in Haft. — $\mathcal{H} = \{X \in \mathcal{U} \mid \mathbf{H}(X)\}$
- Formeln:
  - $\exists X \in \mathcal{V}: \mathbf{D}(X) \land \neg \exists Y \in \mathcal{V}: (X \neq Y) \land \mathbf{D}(Y)$
  - $(\mathbf{W}(A) \land \mathbf{D}(B)) \lor (\neg \mathbf{W}(A) \land \neg \mathbf{D}(B))$
  - $(\mathbf{W}(B) \land \mathbf{D}(C)) \lor (\neg \mathbf{W}(B) \land \neg \mathbf{D}(C))$
  - $(\mathbf{W}(C) \land \mathbf{D}(E)) \lor (\neg \mathbf{W}(C) \land \neg \mathbf{D}(E))$
  - $\exists X \in \mathcal{H}: (\quad (\mathbf{W}(X) \land (\forall Y \in \mathcal{H}: \neg \mathbf{W}(Y) \land (X \neq Y)))$
    $\lor (\neg \mathbf{W}(X) \land \neg(\forall Y \in \mathcal{H}: \neg \mathbf{W}(Y) \land (X \neq Y))))$

Normalformen: Formel 1/3

- $\exists X \in \mathcal{V}: (\mathbf{D}(X) \land \neg\exists Y \in \mathcal{V}: (X \neq Y) \land \mathbf{D}(Y))$
- Alle Variablen gebunden?
  $\exists X \in \mathcal{V}: (\mathbf{D}(X) \land \neg\exists Y \in \mathcal{V}: (X \neq Y) \land \mathbf{D}(Y))$
- Beseitigung des negierten Quantors ($\neg\exists x: F = \forall x: \neg F$)
  - $\exists X \in \mathcal{V}: \mathbf{D}(X) \land \forall Y \in \mathcal{V}: \neg((X \neq Y) \land \mathbf{D}(Y))$
- DeMorgan
  - $\exists X \in \mathcal{V}: \mathbf{D}(X) \land \forall Y \in \mathcal{V}: \neg(X \neq Y) \lor \neg\mathbf{D}(Y)$
- Pränexe Normalform
  - $\exists X \in \mathcal{V} \forall Y \in \mathcal{V}: \mathbf{D}(X) \land (\neg(X \neq Y) \lor \neg\mathbf{D}(Y))$
- „Aufräumen“ (Involution, Distributivität)
  - $\exists X \in \mathcal{V} \forall Y \in \mathcal{V}: (\mathbf{D}(X) \land (X = Y)) \lor (\mathbf{D}(X) \land \neg\mathbf{D}(Y))$
- Skolemform
  - $\forall Y \in \mathcal{V}: (\mathbf{D}(sk_X()) \land (sk_x() = Y)) \lor (\mathbf{D}(sk_X()) \land \neg\mathbf{D}(Y))$
  - Dabei $sk_X() =: p$ eine geeignete (und offensichtlich konstante) Funktion, die jedoch von obiger Formel abhängt!

Normalformen: Formel 1/3 DNF

- $\forall Y \in \mathcal{V}$: $(\mathbf{D}(p) \wedge (p=Y)) \vee (\mathbf{D}(p) \wedge \neg\mathbf{D}(Y))$
- DNF:
  - Atome: $\mathbf{D}(p)$, $(sk_x()=Y)$, $\mathbf{D}(Y)$
  - Somit:

$$
\begin{aligned}
F \quad &= (\mathbf{D}(p)\wedge(p=Y)) \vee (\mathbf{D}(p)\wedge\neg\mathbf{D}(Y)) \\
&= (\mathbf{D}(p)\wedge(p=Y)\wedge\mathbf{D}(Y)) \vee (\mathbf{D}(p)\wedge(p=Y)\wedge\neg\mathbf{D}(Y)) \\
&\quad \vee (\mathbf{D}(p)\wedge\neg\mathbf{D}(Y)) \\
&= (\mathbf{D}(p)\wedge(p=Y)\wedge\mathbf{D}(Y)) \vee (\mathbf{D}(p)\wedge(p=Y)\wedge\neg\mathbf{D}(Y)) \\
&\quad \cancel{\vee (\mathbf{D}(p)\wedge(p=Y)\wedge\neg\mathbf{D}(Y))} \vee (\mathbf{D}(p)\wedge(p\neq Y)\wedge\neg\mathbf{D}(Y)) \\
&= (\mathbf{D}(p)\wedge(p=Y)\wedge\mathbf{D}(Y)) \vee \underbrace{\cancel{(\mathbf{D}(p)\wedge(p=Y)\wedge\neg\mathbf{D}(Y))}}_{\equiv 0} \\
&\quad \vee (\mathbf{D}(p)\wedge(p\neq Y)\wedge\neg\mathbf{D}(Y)) \\
\text{Duplikat} \quad &= (\mathbf{D}(p)\wedge(p=Y)\wedge\mathbf{D}(Y)) \vee (\mathbf{D}(p)\wedge(p\neq Y)\wedge\neg\mathbf{D}(Y)) \qquad \equiv 0
\end{aligned}
$$

Normalformen: Formel 1/3 KNF

- Pränexe Normalform
  - $\exists X \in \mathcal{V} \forall Y \in \mathcal{V}$: $(\mathbf{D}(X) \wedge (\neg(X \neq Y) \vee \neg\mathbf{D}(Y)))$
- Skolemform
  - $\forall Y \in \mathcal{V}$: $(\mathbf{D}(p) \wedge ((p = Y) \vee \neg\mathbf{D}(Y)))$
- KNF:
  - Atome: $\mathbf{D}(p)$, $(sk_x() = Y)$, $\mathbf{D}(Y)$
  - Somit:

$$
\begin{aligned}
F &= \mathbf{D}(p) \wedge ((p=Y) \vee \neg\mathbf{D}(Y)) \\
&= (\mathbf{D}(p) \vee (p=Y) \vee \mathbf{D}(Y)) \wedge (\mathbf{D}(p) \vee (p=Y) \vee \neg\mathbf{D}(Y)) \\
&\wedge (\mathbf{D}(p) \vee (p \neq Y) \vee \mathbf{D}(Y)) \wedge (\mathbf{D}(p) \vee (p \neq Y) \vee \neg\mathbf{D}(Y)) \\
&\wedge ((p=Y) \vee \neg\mathbf{D}(Y)) \\
&= (\mathbf{D}(p) \vee (p=Y) \vee \mathbf{D}(Y)) \wedge (\mathbf{D}(p) \vee (p=Y) \vee \neg\mathbf{D}(Y)) \\
&\wedge (\mathbf{D}(p) \vee (p \neq Y) \vee \mathbf{D}(Y)) \wedge (\mathbf{D}(p) \vee (p \neq Y) \vee \neg\mathbf{D}(Y)) \\
&\wedge (\mathbf{D}(p) \vee (p=Y) \vee \neg\mathbf{D}(Y)) \wedge (\neg\mathbf{D}(p) \vee (p=Y) \vee \neg\mathbf{D}(Y)) \\
&= (\mathbf{D}(p) \vee (p=Y) \vee \mathbf{D}(Y)) \wedge (\mathbf{D}(p) \vee (p=Y) \vee \neg\mathbf{D}(Y)) \\
&\wedge (\mathbf{D}(p) \vee (p \neq Y) \vee \mathbf{D}(Y)) \wedge (\mathbf{D}(p) \vee (p \neq Y) \vee \neg\mathbf{D}(Y)) \\
&\wedge (\neg\mathbf{D}(p) \vee (p=Y) \vee \neg\mathbf{D}(Y))
\end{aligned}
$$

Normalformen: Formel 2/3

- $((\mathbf{W}(A)\wedge\mathbf{D}(B)) \vee (\neg\mathbf{W}(A)\wedge\neg\mathbf{D}(B))) \wedge$
  $((\mathbf{W}(B)\wedge\mathbf{D}(C)) \vee (\neg\mathbf{W}(B)\wedge\neg\mathbf{D}(C))) \wedge$
  $((\mathbf{W}(C)\wedge\mathbf{D}(E)) \vee (\neg\mathbf{W}(C)\wedge\neg\mathbf{D}(E)))$

- Gesucht: DNF, 1. Schritt: Distribution
- $((\mathbf{W}(A)\wedge\mathbf{D}(B)) \wedge (((\mathbf{W}(B)\wedge\mathbf{D}(C)) \vee (\neg\mathbf{W}(B)\wedge\neg\mathbf{D}(C))) \wedge ((\mathbf{W}(C)\wedge\mathbf{D}(E)) \vee (\neg\mathbf{W}(C)\wedge\neg\mathbf{D}(E))))) \vee ((\neg\mathbf{W}(A)\wedge\neg\mathbf{D}(B))) \wedge (((\mathbf{W}(B)\wedge\mathbf{D}(C)) \vee (\neg\mathbf{W}(B)\wedge\neg\mathbf{D}(C))) \wedge ((\mathbf{W}(C)\wedge\mathbf{D}(E)) \vee (\neg\mathbf{W}(C)\wedge\neg\mathbf{D}(E)))))$

- Problem: Umformung extrem unübersichtlich
- Trick für Umformung:
  - Suche möglichst große „Atome“, also Terme, die nicht gespalten werden müssen/brauchen/sollen, im Falle der DNF sind das möglichst große innere Konjunktionen, also z.B. $\underbrace{(\mathbf{W}(A)\wedge\mathbf{D}(B))}_{\alpha}$
  - Ersetze die Terme durch Bezeichner
  - Rechne mit den Bezeichnern
  - Zuletzt ersetze die Bezeichner wieder durch die jeweiligen Terme

Normalformen: Formel 2/3

- $(\overset{x_1}{\cancel{(\mathbf{W}(A) \wedge \mathbf{D}(B))}} \vee \overset{x_2}{\cancel{(\neg\mathbf{W}(A) \wedge \neg\mathbf{D}(B))}}) \wedge$
  $((\mathbf{W}(B) \wedge \mathbf{D}(C)) \vee (\neg\mathbf{W}(B) \wedge \neg\mathbf{D}(C))) \wedge$
  $((\mathbf{W}(C) \wedge \mathbf{D}(E)) \vee (\neg\mathbf{W}(C) \wedge \neg\mathbf{D}(E)))$

- Berechne statt dessen
  - $(x_1 \vee x_2) \wedge$
    $(y_1 \vee y_2) \wedge$
    $(z_1 \vee z_2)$

  also:
  $x_1 = \mathbf{W}(A) \wedge \mathbf{D}(B)$, $x_2 = \neg\mathbf{W}(A) \wedge \neg\mathbf{D}(B)$
  $y_1 = \mathbf{W}(B) \wedge \mathbf{D}(C)$, $y_2 = \neg\mathbf{W}(B) \wedge \neg\mathbf{D}(C)$
  $z_1 = \mathbf{W}(C) \wedge \mathbf{D}(E)$, $z_2 = \neg\mathbf{W}(C) \wedge \neg\mathbf{D}(E)$

- 1. Schritt (Distributivität):

$$(x_1 \wedge (y_1 \vee y_2) \wedge (z_1 \vee z_2))$$
$$\vee\, (x_2 \wedge (y_1 \vee y_2) \wedge (z_1 \vee z_2))$$

- 2. Schritt (Distributivität):

$$((x_1 \wedge y_1 \wedge (z_1 \vee z_2)) \;\vee\; (x_1 \wedge y_2 \wedge (z_1 \vee z_2)))$$
$$\vee\, ((x_2 \wedge y_1 \wedge (z_1 \vee z_2)) \;\vee\; (x_2 \wedge y_2 \wedge (z_1 \vee z_2)))$$

- 2. Schritt (Distributivität):

$$
\begin{aligned}
&(x_1 \land y_1 \land (z_1 \lor z_2)) \\
\lor\ &(x_1 \land y_2 \land (z_1 \lor z_2)) \\
\lor\ &(x_2 \land y_1 \land (z_1 \lor z_2)) \\
\lor\ &(x_2 \land y_2 \land (z_1 \lor z_2))
\end{aligned}
$$

- 3. Schritt (Distributivität):

$$
\begin{aligned}
&(x_1 \land y_1 \land z_1) \lor (x_1 \land y_1 \land z_2) \\
\lor\ &(x_1 \land y_2 \land z_1) \lor (x_1 \land y_2 \land z_2) \\
\lor\ &(x_2 \land y_1 \land z_1) \lor (x_2 \land y_1 \land z_2) \\
\lor\ &(x_2 \land y_2 \land z_1) \lor (x_2 \land y_2 \land z_2)
\end{aligned}
$$

- Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{W}(A)\mathbf{D}(B)\mathbf{W}(B)\mathbf{D}(C)\mathbf{W}(C)\mathbf{D}(E) \lor \mathbf{W}(A)\mathbf{D}(B)\mathbf{W}(B)\mathbf{D}(C)\neg\mathbf{W}(C)\neg\mathbf{D}(E) \\
\lor\ &\mathbf{W}(A)\mathbf{D}(B)\neg\mathbf{W}(B)\neg\mathbf{D}(C)\mathbf{W}(C)\mathbf{D}(E) \lor \mathbf{W}(A)\mathbf{D}(B)\neg\mathbf{W}(B)\neg\mathbf{D}(C)\neg\mathbf{W}(C)\neg\mathbf{D}(E) \\
\lor\ &\neg\mathbf{W}(A)\neg\mathbf{D}(B)\mathbf{W}(B)\mathbf{D}(C)\mathbf{W}(C)\mathbf{D}(E) \lor \neg\mathbf{W}(A)\neg\mathbf{D}(B)\mathbf{W}(B)\mathbf{D}(C)\neg\mathbf{W}(C)\neg\mathbf{D}(E) \\
\lor\ &\neg\mathbf{W}(A)\neg\mathbf{D}(B)\neg\mathbf{W}(B)\neg\mathbf{D}(C)\mathbf{W}(C)\mathbf{D}(E) \lor \\
&\neg\mathbf{W}(A)\neg\mathbf{D}(B)\neg\mathbf{W}(B)\neg\mathbf{D}(C)\neg\mathbf{W}(C)\neg\mathbf{D}(E)
\end{aligned}
$$

Erinnerung:

$x_1=\mathbf{W}(A)\land\mathbf{D}(B)$, $x_2=\neg\mathbf{W}(A)\land\neg\mathbf{D}(B)$

$y_1=\mathbf{W}(B)\land\mathbf{D}(C)$, $y_2=\neg\mathbf{W}(B)\land\neg\mathbf{D}(C)$

$z_1=\mathbf{W}(C)\land\mathbf{D}(E)$, $z_2=\neg\mathbf{W}(C)\land\neg\mathbf{D}(E)$

- Sortieren (Kommutativität) und mit Quantoren versehen:

$A,B,C,E \in \mathcal{V}$:

	W(A)	**W**(B)	**W**(C)	**D**(B)	**D**(C)	**D**(E)
∨	**W**(A)	**W**(B)	¬**W**(C)	**D**(B)	**D**(C)	¬**D**(E)
∨	**W**(A)	¬**W**(B)	**W**(C)	**D**(B)	¬**D**(C)	**D**(E)
∨	**W**(A)	¬**W**(B)	¬**W**(C)	**D**(B)	¬**D**(C)	¬**D**(E)
∨	¬**W**(A)	**W**(B)	**W**(C)	¬**D**(B)	**D**(C)	**D**(E)
∨	¬**W**(A)	**W**(B)	¬**W**(C)	¬**D**(B)	**D**(C)	¬**D**(E)
∨	¬**W**(A)	¬**W**(B)	**W**(C)	¬**D**(B)	¬**D**(C)	**D**(E)
∨	¬**W**(A)	¬**W**(B)	¬**W**(C)	¬**D**(B)	¬**D**(C)	¬**D**(E)

- $\exists X \in \mathcal{H}: (\quad (\mathbf{W}(X) \wedge (\forall Y \in \mathcal{H}: \neg\mathbf{W}(Y) \wedge (X \neq Y)))$
  $\vee (\neg\mathbf{W}(X) \wedge \neg(\forall Y \in \mathcal{H}: \neg\mathbf{W}(Y) \wedge (X \neq Y))))$
- Vorziehen der Quantoren
  - Auflösen der Negation ($\neg\forall x: F = \exists x: \neg F$)
    - $\exists X \in \mathcal{H}: (\quad (\mathbf{W}(X) \wedge (\forall Y \in \mathcal{H}: \neg\mathbf{W}(Y) \wedge (X \neq Y)))$
      $\vee (\neg\mathbf{W}(X) \wedge \exists Y \in \mathcal{H}: \neg(\neg\mathbf{W}(Y) \wedge (X \neq Y))))$
  - Vorziehen:
    - $\exists X \forall Y$ … oder
    - $\exists X \exists Y$ … ?
  - Betachte Bindung:
    $\exists X \in \mathcal{H}: (\mathbf{W}(X) \wedge (\forall Y \in \mathcal{H}: \neg\mathbf{W}(Y) \wedge (X \neq Y))) \vee (\neg\mathbf{W}(X) \wedge \exists Y \in \mathcal{H}: \neg(\neg\mathbf{W}(Y) \wedge (X \neq Y))))$
  - Somit ist folgende Formel dazu äquivalent:
    $\exists X \in \mathcal{H}: (\mathbf{W}(X) \wedge (\forall Y \in \mathcal{H}: \neg\mathbf{W}(Y) \wedge (X \neq Y))) \vee (\neg\mathbf{W}(X) \wedge \exists Z \in \mathcal{H}: \neg(\neg\mathbf{W}(Z) \wedge (X \neq Z))))$
  - 1x Kommutativgesetz:
    $\exists X \in \mathcal{H}: (\neg\mathbf{W}(X) \wedge \exists Z \in \mathcal{H}: \neg(\neg\mathbf{W}(Z) \wedge (X \neq Z))) \vee (\mathbf{W}(X) \wedge (\forall Y \in \mathcal{H}: \neg\mathbf{W}(Y) \wedge (X \neq Y))))$

Normalformen: Formel 3/3

- Die pränexe Form lautet:
  $\exists X\in\mathcal{H}\exists Z\in\mathcal{H}\forall Y\in\mathcal{H}$: $((\neg\mathbf{W}(X)\wedge\neg(\neg\mathbf{W}(Z)\wedge(X\neq Z)))\vee(\mathbf{W}(X)\wedge\neg\mathbf{W}(Y)\wedge(X\neq Y)))$

- DeMorgan (und Involution):
  $\exists X\in\mathcal{H}\exists Z\in\mathcal{H}\forall Y\in\mathcal{H}$: $((\neg\mathbf{W}(X)\wedge\mathbf{W}(Z))\vee(X\neq Z)\vee(\mathbf{W}(X)\wedge\neg\mathbf{W}(Y)\wedge(X\neq Y)))$
- In Skolemform:
  - $\forall Y\in\mathcal{H}$: $(\neg\mathbf{W}(sk_X())\wedge\mathbf{W}(sk_Z()))\vee(sk_X()\neq sk_Z())\vee(\mathbf{W}(sk_X())\wedge\neg\mathbf{W}(Y)\wedge(Y\neq sk_X()))$
  - Wiederum: $sk_X() =: q$ und $sk_Z() =: r$ sind zwar abhängig von der obigen Formel, jedoch für alle Interpretationen gleich.
  - Durch Anwendung des Kommutativitätsgesetzes gilt auch für $sk_Z()$: abhängig von obiger Formel, jedoch für alle Interpretationen gleich.
- Für die DNF:
  - Atome: $\mathbf{W}(q)$, $\mathbf{W}(Y)$, $\mathbf{W}(r)$, $(q=Y)$, $(q=r)$
  - $F= (\neg\mathbf{W}(q)\wedge\mathbf{W}(r))\vee(q\neq r)\vee(\mathbf{W}(q)\wedge\neg\mathbf{W}(Y)\wedge(q\neq Y))$

Normalformen: Formel 3/3 (DNF)

$$(\neg\mathbf{W}(q)\wedge\mathbf{W}(r)) \vee (q\neq r) \vee (\mathbf{W}(q)\wedge\neg\mathbf{W}(Y)\wedge(q\neq Y))$$

$$= \cancel{(\neg\mathbf{W}(q)\wedge\mathbf{W}(Y)\wedge\mathbf{W}(r)\wedge(q=Y)\wedge(q=r))} \vee (\neg\mathbf{W}(q)\wedge\neg\mathbf{W}(Y)\wedge\mathbf{W}(r)\wedge(q=Y)\wedge(q=r))$$

$$\vee (\neg\mathbf{W}(q)\wedge\mathbf{W}(Y)\wedge\mathbf{W}(r)\wedge(q=Y)\wedge(q\neq r)) \vee (\neg\mathbf{W}(q)\wedge\neg\mathbf{W}(Y)\wedge\mathbf{W}(r)\wedge(q=Y)\wedge(q\neq r))$$

$$\vee (\neg\mathbf{W}(q)\wedge\mathbf{W}(Y)\wedge\mathbf{W}(r)\wedge(q\neq Y)\wedge(q=r)) \vee (\neg\mathbf{W}(q)\wedge\neg\mathbf{W}(Y)\wedge\mathbf{W}(r)\wedge(q\neq Y)\wedge(q=r))$$

$$\vee (\neg\mathbf{W}(q)\wedge\mathbf{W}(Y)\wedge\mathbf{W}(r)\wedge(q\neq Y)\wedge(q\neq r)) \vee (\neg\mathbf{W}(q)\wedge\neg\mathbf{W}(Y)\wedge\mathbf{W}(r)\wedge(q\neq Y)\wedge(q\neq r))$$

$$\vee (\mathbf{W}(q)\wedge\mathbf{W}(Y)\wedge\mathbf{W}(r)\wedge(q=Y)\wedge(q\neq r)) \vee (\mathbf{W}(q)\wedge\mathbf{W}(Y)\wedge\mathbf{W}(r)\wedge(q\neq Y)\wedge(q\neq r))$$

$$\vee (\mathbf{W}(q)\wedge\mathbf{W}(Y)\wedge\neg\mathbf{W}(r)\wedge(q=Y)\wedge(q\neq r)) \vee (\mathbf{W}(q)\wedge\mathbf{W}(Y)\wedge\neg\mathbf{W}(r)\wedge(q\neq Y)\wedge(q\neq r))$$

$$\vee (\mathbf{W}(q)\wedge\neg\mathbf{W}(Y)\wedge\mathbf{W}(r)\wedge(q=Y)\wedge(q\neq r)) \vee (\mathbf{W}(q)\wedge\neg\mathbf{W}(Y)\wedge\mathbf{W}(r)\wedge(q\neq Y)\wedge(q\neq r))$$

$$\vee (\mathbf{W}(q)\wedge\neg\mathbf{W}(Y)\wedge\neg\mathbf{W}(r)\wedge(q=Y)\wedge(q\neq r)) \vee (\mathbf{W}(q)\wedge\neg\mathbf{W}(Y)\wedge\neg\mathbf{W}(r)\wedge(q\neq Y)\wedge(q\neq r))$$

$$\vee (\neg\mathbf{W}(q)\wedge\mathbf{W}(Y)\wedge\mathbf{W}(r)\wedge(q=Y)\wedge(q\neq r)) \vee (\neg\mathbf{W}(q)\wedge\mathbf{W}(Y)\wedge\mathbf{W}(r)\wedge(q\neq Y)\wedge(q\neq r))$$

$$\vee (\neg\mathbf{W}(q)\wedge\mathbf{W}(Y)\wedge\neg\mathbf{W}(r)\wedge(q=Y)\wedge(q\neq r)) \vee (\neg\mathbf{W}(q)\wedge\mathbf{W}(Y)\wedge\neg\mathbf{W}(r)\wedge(q\neq Y)\wedge(q\neq r))$$

$$\vee (\neg\mathbf{W}(q)\wedge\neg\mathbf{W}(Y)\wedge\mathbf{W}(r)\wedge(q=Y)\wedge(q\neq r)) \vee (\neg\mathbf{W}(q)\wedge\neg\mathbf{W}(Y)\wedge\mathbf{W}(r)\wedge(q\neq Y)\wedge(q\neq r))$$

$$\vee (\neg\mathbf{W}(q)\wedge\neg\mathbf{W}(Y)\wedge\neg\mathbf{W}(r)\wedge(q=Y)\wedge(q\neq r)) \vee(\neg\mathbf{W}(q)\wedge\neg\mathbf{W}(Y)\wedge\neg\mathbf{W}(r)\wedge(q\neq Y)\wedge(q\neq r))$$

$$\vee (\mathbf{W}(q)\wedge\neg\mathbf{W}(Y)\wedge\mathbf{W}(r)\wedge(q\neq Y)\wedge(q=r)) \vee (\mathbf{W}(q)\wedge\neg\mathbf{W}(Y)\wedge\mathbf{W}(r)\wedge(q\neq Y)\wedge(q\neq r))$$

$$\vee (\mathbf{W}(q)\wedge\neg\mathbf{W}(Y)\wedge\neg\mathbf{W}(r)\wedge(q\neq Y)\wedge(q=r)) \vee (\mathbf{W}(q)\wedge\neg\mathbf{W}(Y)\wedge\neg\mathbf{W}(r)\wedge(q\neq Y)\wedge(q\neq r))$$

- Die Formel war: $\forall Y \in \mathcal{H}$: F

$F = (\neg \mathbf{W}(q) \wedge \neg \mathbf{W}(Y) \wedge \mathbf{W}(r) \wedge (q=Y) \wedge (q \neq r)) \vee (\neg \mathbf{W}(q) \wedge \mathbf{W}(Y) \wedge \mathbf{W}(r) \wedge (q \neq Y) \wedge (q \neq r))$
$\vee (\mathbf{W}(q) \wedge \neg \mathbf{W}(Y) \wedge \neg \mathbf{W}(r) \wedge (q \neq Y) \wedge (q \neq r)) \vee (\mathbf{W}(q) \wedge \neg \mathbf{W}(Y) \wedge \mathbf{W}(r) \wedge (q \neq Y) \wedge (q=r))$

Zusammenfassung

1. $\forall Y \in \mathcal{V}$: $((\mathbf{D}(p) \land (p=Y) \land \mathbf{D}(Y)) \lor (\mathbf{D}(p) \land (p \neq Y) \land \neg\mathbf{D}(Y)))$

2. $A,B,C,E \in \mathcal{V}$:

$$
\begin{array}{ll}
 & \mathbf{W}(A)\mathbf{W}(B)\mathbf{W}(C)\mathbf{D}(B)\mathbf{D}(C)\mathbf{D}(E) \\
\lor & \mathbf{W}(A)\mathbf{W}(B)\neg\mathbf{W}(C)\mathbf{D}(B)\mathbf{D}(C)\neg\mathbf{D}(E) \\
\lor & \mathbf{W}(A)\neg\mathbf{W}(B)\mathbf{W}(C)\mathbf{D}(B)\neg\mathbf{D}(C)\mathbf{D}(E) \\
\lor & \mathbf{W}(A)\neg\mathbf{W}(B)\neg\mathbf{W}(C)\mathbf{D}(B)\neg\mathbf{D}(C)\neg\mathbf{D}(E) \\
\lor & \neg\mathbf{W}(A)\mathbf{W}(B)\mathbf{W}(C)\neg\mathbf{D}(B)\mathbf{D}(C)\mathbf{D}(E) \\
\lor & \neg\mathbf{W}(A)\mathbf{W}(B)\neg\mathbf{W}(C)\neg\mathbf{D}(B)\mathbf{D}(C)\neg\mathbf{D}(E) \\
\lor & \neg\mathbf{W}(A)\neg\mathbf{W}(B)\mathbf{W}(C)\neg\mathbf{D}(B)\neg\mathbf{D}(C)\mathbf{D}(E) \\
\lor & \neg\mathbf{W}(A)\neg\mathbf{W}(B)\neg\mathbf{W}(C)\neg\mathbf{D}(B)\neg\mathbf{D}(C)\neg\mathbf{D}(E)
\end{array}
$$

3. $\forall Y \in \mathcal{H}$: $(\neg\mathbf{W}(q) \land \neg\mathbf{W}(Y) \land \mathbf{W}(r) \land (q=Y) \land (q \neq r))$

$$
\begin{array}{l}
\lor\ (\neg\mathbf{W}(q) \land \mathbf{W}(Y) \land \mathbf{W}(r) \land (q \neq Y) \land (q \neq r)) \\
\lor\ (\mathbf{W}(q) \land \neg\mathbf{W}(Y) \land \neg\mathbf{W}(r) \land (q \neq Y) \land (q \neq r)) \\
\lor\ (\mathbf{W}(q) \land \neg\mathbf{W}(Y) \land \mathbf{W}(r) \land (q \neq Y) \land (q=r))
\end{array}
$$

Auswertung

- Aus (1) und (2) folgern wir, dass nur

$$\mathbf{W}(A)\neg\mathbf{W}(B)\neg\mathbf{W}(C)\mathbf{D}(B)\neg\mathbf{D}(C)\neg\mathbf{D}(E)$$
$$\vee \quad \neg\mathbf{W}(A)\mathbf{W}(B)\neg\mathbf{W}(C)\neg\mathbf{D}(B)\mathbf{D}(C)\neg\mathbf{D}(E)$$
$$\vee \quad \neg\mathbf{W}(A)\neg\mathbf{W}(B)\mathbf{W}(C)\neg\mathbf{D}(B)\neg\mathbf{D}(C)\mathbf{D}(E)$$

gelten kann. Offensichtlich lügen in jedem Fall 2 der Inhaftierten.

Es gilt: $\forall Y\in\mathcal{H}$: $(\neg\mathbf{W}(q)\wedge\neg\mathbf{W}(Y)\wedge\mathbf{W}(r)\wedge(q=Y)\wedge(q\neq r))$
$\vee\ (\neg\mathbf{W}(q)\wedge\mathbf{W}(Y)\wedge\mathbf{W}(r)\wedge(q\neq Y)\wedge(q\neq r))$
$\vee\ (\mathbf{W}(q)\wedge\neg\mathbf{W}(Y)\wedge\neg\mathbf{W}(r)\wedge(q\neq Y)\wedge(q\neq r))$
$\vee\ (\mathbf{W}(q)\wedge\neg\mathbf{W}(Y)\wedge\mathbf{W}(r)\wedge(q\neq Y)\wedge(q=r))$

- Es ergeben sich prinzipiell $4^3=64$ mögliche Belegungen:
  - p=A, q=A, r=A, oder p=A, q=A, r=B, oder p=A, q=B, r=A, oder p=A, q=B, r=B, oder p=B, q=A, r=A, oder p=B, q=A, r=B, oder p=B, q=B, r=A, oder p=B, q=B, r=B, oder p=B, q=B, r=C, …

ToDo:

- Leider fehlt noch folgender Teil des Rätsels in prädikatenlogischer Form. Daher kann aus den bisher gezeigten Formeln auch noch keine eindeutige Aussage hergeleitet werden:
  - *„Der Richter überlegte eine Weile, wies dann auf einen der drei und sprach: „Es ist offensichtlich, dass du das Pferd nicht gestohlen hast; du darfst das Gericht deshalb verlassen.“ Der Freigesprochene willigte dankbar ein, und so blieben nur noch zwei Angeklagte übrig.*
    Der Richter fragte daraufhin einen der beiden verbleibenden Angeklagten, ob der andere ein Ritter sei, und wusste, nachdem er die Antwort (Ja oder Nein) erhalten hatte, wer der Pferdedieb war.“

Übungsblätter

- Sowie die Musterlösungen finden Sie unter

http://www.infoeins.de/uebungsblaetter.php