Übungen zu Informatik I Wintersemester 03/04

Übungsleiter: Dipl.-Inform. Tom Gelhausen

Ordnungsrelationen

Eigenschaften einer Ordnungsrelation:

reflexiv transitiv antisymmetrisch

Aufgabe:

Sind folgende Relationen auf den jeweiligen Mengen Ordnungsrelationen?

1. Gegeben sei eine Menge von Jungen, die die gleiche Mutter haben.

   Ist die Relation „hat die gleiche Mutter wie" eine Ordnung?

reflexiv? ✓

transitiv? ✓

antisymmetrisch? Nein, Relation ist symmetrisch

$\Rightarrow$ Äquivalenzrelation

Ordnungsrelationen

2. Gegeben sei eine hierarchisch organisierte Firma.

Ist die Relation "ist direkter oder indirekter Vorgesetzter von" eine Ordnung?

Nehmen Sie dazu an, dass jeder zumindest teilweise sein eigener Chef ist.

reflexiv? $\surd$ wegen Annahme

antisymmetrisch? $\surd$

transitiv? $\surd$

Ist die Relation eine Halbordnung oder eine totale Ordnung?

Nur eine Halbordnung, da z.B. zwei Angestellte auf der gleichen Hierarchiestufe nicht miteinander vergleichbar sind.

Ketten

Kette:

eine totalgeordnete Teilmenge einer halbgeordneten Menge (U, ≤).

Erinnerung:

- noethersch: jede aufsteigende Kette $a_0 \le a_1 \le \ldots \le a_i \le \ldots$ bricht ab
- artinsch: jede absteigende Kette $\ldots \le a_{-i} \le \ldots \le a_{-1} \le a_0$ bricht ab
- fundiert: für jedes nicht leere $X \subseteq U$ gilt $\inf(X) \in X \Leftrightarrow (U, \le)$ ist artinsch

Ist eine **endliche** ~~Kette~~ Menge U

noethersch?

artinsch?

fundiert?

☛ Unabhängig davon, ob man sie nun als aufsteigende oder absteigende Kette betrachtet, "bricht die Kette ab", wenn die Teilmenge endlich ist - und zwar sowohl in aufsteigender als auch in absteigender Richtung.

Hasse-Diagramme

Problem:

Der Graph zu einer Halbordnung kann sehr unübersichtlich sein.

Lösung:

Entfernung aller transitiver und reflexiver Kanten aus dem Graph
(→ Entfernung redundanter Information, Halbordnung ist immer reflexiv und transitiv).

Der entstandene Graph heißt **Hasse-Diagramm**.

Hinweis:

Das Hasse-Diagramm existiert immer für endliche Halbordnung.
Für unendliche Halbordnungen existiert es nicht immer!

Hasse-Diagramme

Beispiel:

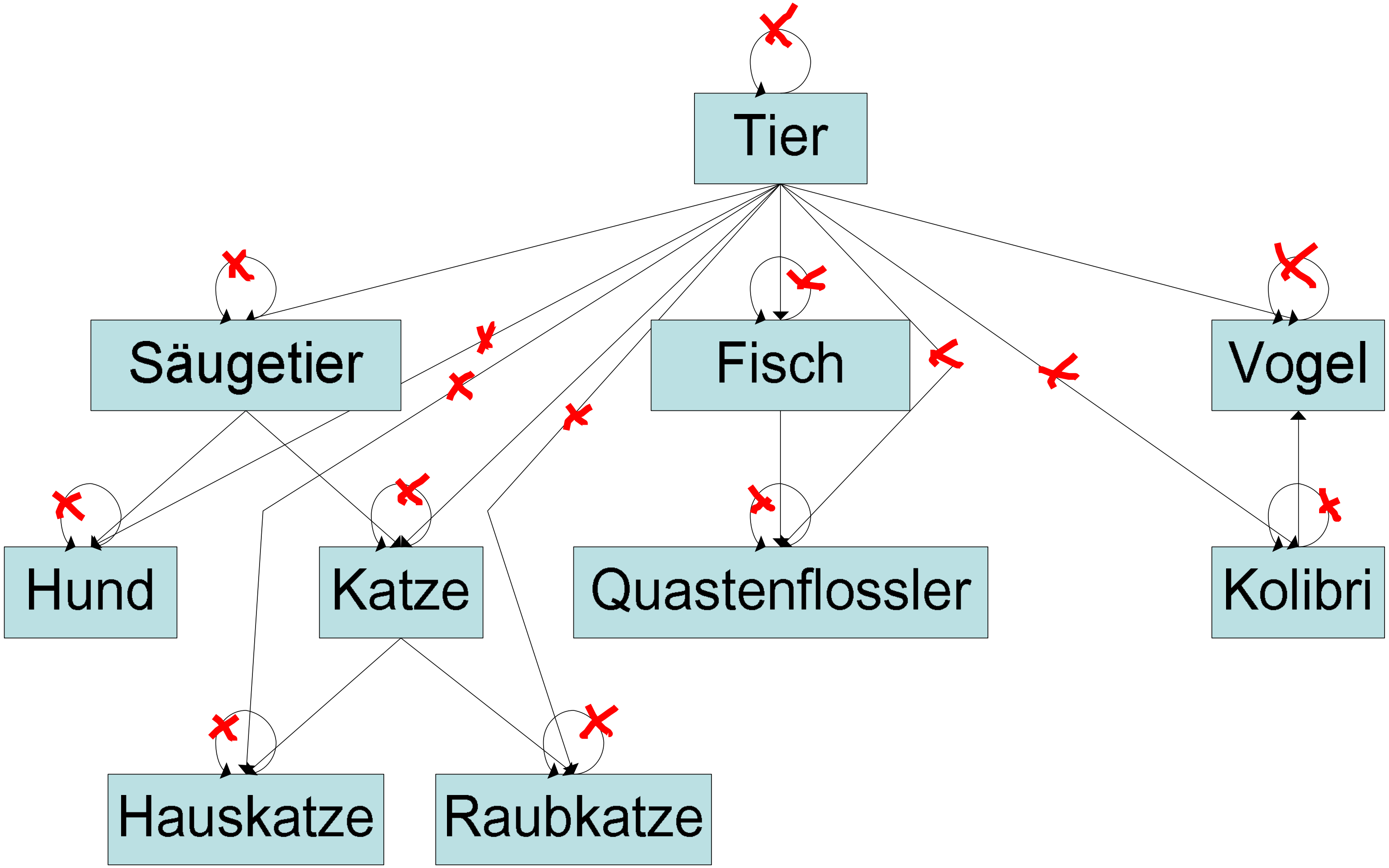
Gegeben sei die Halbordnung **„ist ein/eine“** auf der Menge T.

T = { Tier, Säugetier, Fisch, Vogel, Hund, Katze, Hauskatze, Raubkatze, Quastenflossler, Kolibri }

Graph der Halbordnung:

Hasse-Diagramme

Der Graph zu der Halbordnung wird sehr unübersichtlich:

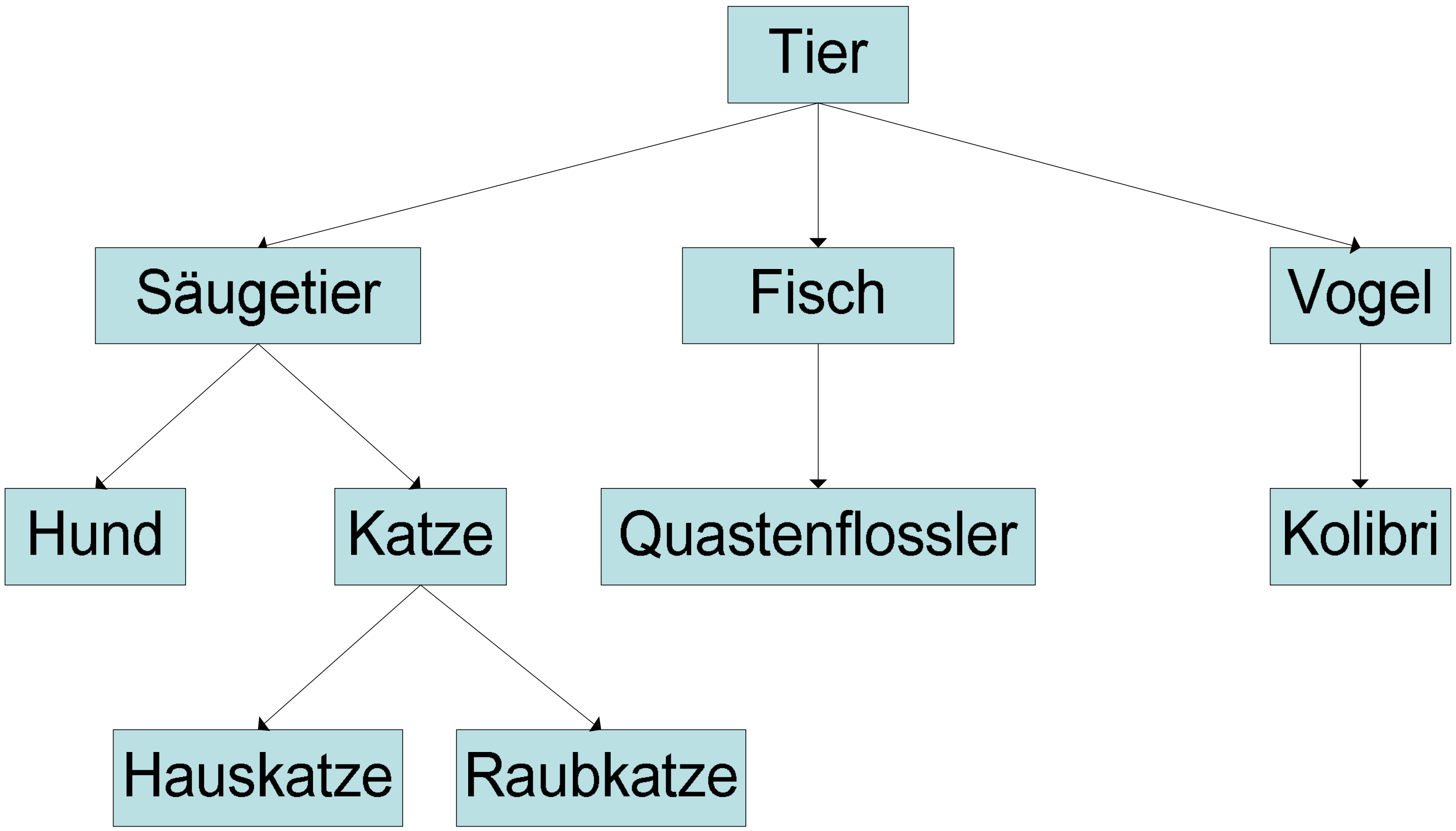


Hasse-Diagramme

Hasse-Diagramm zu der Halbordnung:

Hasse-Diagramme

Hasse-Diagramm zu der Halbordnung:



Nach Entfernung der reflexiven und transitiven Kanten ist der Graph nun um einiges übersichtlicher geworden.

Idee:

Man will alle Elemente einer Halbordnung (U, $\preccurlyeq$) in eine Liste L = $[e_0, \ldots, e_n]$ eintragen, so dass gilt:

$$a \preccurlyeq b \Rightarrow a \leq b \qquad \text{für alle } a,b \in U$$

Mit anderen Worten:

Ist ein Element e_i in der Halbordnung kleiner als ein Element e_j, dann steht es in der Liste weiter links.

Man bezeichnet diese spezielle Aufreihung der Elemente aus U in der Liste, als Topologische Sortierung.

Hinweis: (U,$\leq$) bildet eine Totalordnung!

Algorithmus zum topologischen Sortieren von (U, ≼):

Sei G = (U, K) der zu ≼ gehörende Graph

1. L = []
   (leere Liste erstellen)
2. V = { e | e ∈ U und |•e| = 0}
   (alle Ecken auswählen, die keine Eingänge haben)
3. $G = G|_{U \setminus V}$
   (entferne alle e ∈ V und die zugehörigen Kanten aus G)
4. Füge alle e ∈ V in beliebiger Reihenfolge hinten in L ein
5. Gehe zu Schritt 2, falls noch Ecken im Graph (|U| > 0)

ACHTUNG:

In den Folien sind Schritte 2. – 4. anders und falsch! Zum Vergleich:

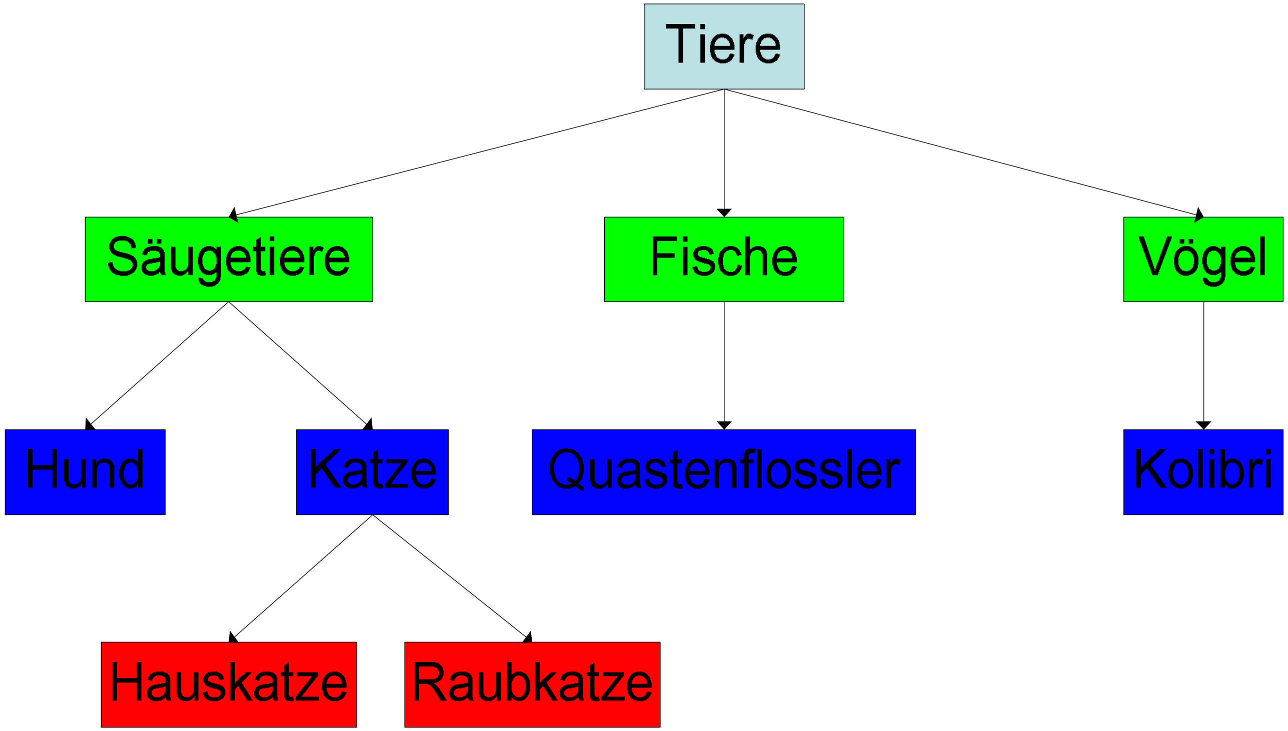
2.& 4. Wähle eine Ecke e mit |•e| = 0 und hänge diese hinten an L an

3. Entferne e aus G = (U, ≼)

Beispiel:

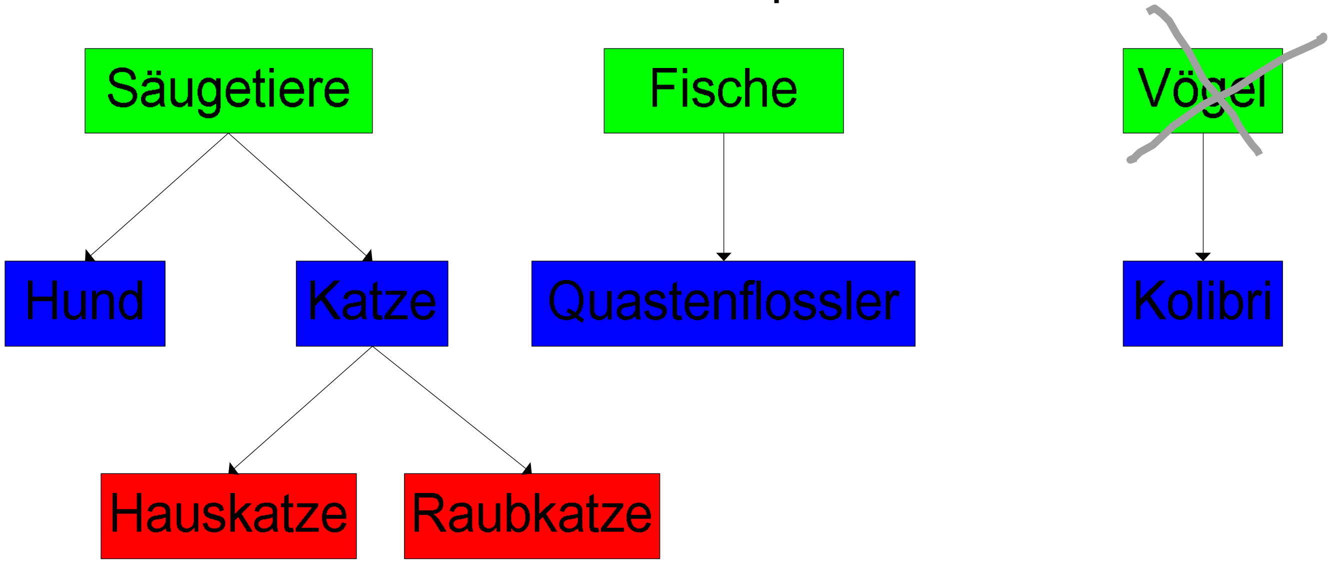
Halbordnung „ist ein/eine“ auf T von vorhin.

- **Graph zur Halbordnung (als Hasse-Diagramm):**



Topologisches Sortieren

- **1. Schritt:** L = []
- **2. Schritt:** V = { Tiere }
- **3. Schritt:** Entferne **Tiere** aus dem Graph:

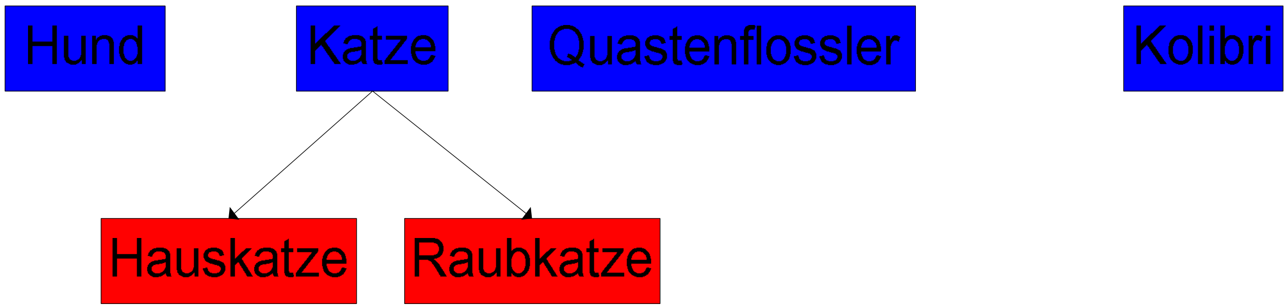


- **4. Schritt:** Füge {Tiere} in L ein:
  L = [Tiere]

- **5. Schritt:** Es sind noch Ecken vorhanden, fahre also mit Schritt 2 fort.

Topologisches Sortieren

- **2. Schritt:** V = { Säugetiere, Fische, Vögel }
- **3. Schritt:** Entferne **Säugetiere**, **Fische**, **Vögel** aus dem Graph:



- **4. Schritt:** Füge Säugetiere, Fische, Vögel in L ein:
  L = [Tiere, Säugetiere, Fische, Vögel]
- **5. Schritt:** Es sind noch Ecken vorhanden, fahre also mit Schritt 2 fort.

Topologisches Sortieren

- **2. Schritt:** V = { Hund, Katze, Quastenflossler, Kolibri }
- **3. Schritt:** Entferne obige Ecken aus dem Graph:

Hauskatze Raubkatze

- **4. Schritt:** Füge die Elemente aus V in L ein:
  L = [Tiere, Säugetiere, Fische, Vögel, Kolibri, Hund, Katze, Quastenflossler]
- **5. Schritt:** Es sind noch Ecken vorhanden, fahre also mit Schritt 2 fort.

Topologisches Sortieren

- **2. Schritt:** V = { Hauskatze, Raubkatze }
- **3. Schritt:** Entferne obige Ecken aus dem Graph:

  Leerer Graph

- **4. Schritt:** Füge die Elemente aus V in L ein:
  L = [Tiere, Säugetiere, Fische, Vögel, Kolibri, Hund, Katze, Quastenflossler, Hauskatze, Raubkatze]
- **5. Schritt:** Kein weitern Ecken vorhanden, fertig.

Topologisches Sortieren

- **Ergebnis:**

  L = [Tiere, Säugetiere, Fische, Vögel, Kolibri, Hund, Katze, Quastenflossler, Hauskatze, Raubkatze]

- Man sieht leicht, dass die Bedingung $e_i \preccurlyeq e_j \Rightarrow i \leq j$ erfüllt ist: Ecken, die im Graph weiter oben standen, stehen hier weiter links, als mit ihnen verbundene, die weiter unten standen.

Verbände

Halbverband (U, ∧):

(U, ∧) abelsche Halbgruppe mit Idempotenz ($a \wedge a = a$).

Verband (U, ∧, ∨):

(U, ∧) und (H, ∨) duale Halbverbände, außerdem gilt das Absorptionsgesetz ($a \vee (a \wedge b) = a$ bzw. $a \wedge (a \vee b) = a$)

Alternative Definition:

Sei (U,≤) Halbordnung mit $\inf(x,y) = \sup\{z \mid z \leq x, z \leq y\}$ eindeutig $\forall\, x,y \in U$.
$x \wedge y = \inf(x,y)$ definiert die Operation eines unteren Halbverbands (U,∧).

Hinweis (zu Beweisen im aktuellen Übungsblatt):

Existiert ein Halbverband (U, ∧), so wird durch

$$x \leq y \text{ gdw. } x \wedge y = x$$

eine Halbordnung (U, ≤) auf U induziert.

Verbände

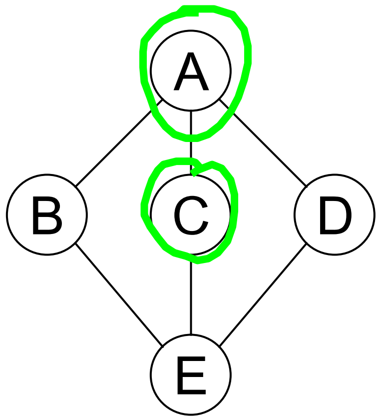
- Damit ein Graph einen unteren Halbverband repräsentiert, muss für je 2 Elemente ein eindeutiges Minimum existieren:

$$x \wedge y = \inf(x, y) = \sup \{ z \mid z \leq x, z \leq y \}$$

entsprechend für den oberen Halbverband.

Beispiel:

$$A \wedge C = \inf(A, C) = \sup \{ z \mid z \leq A, z \leq C \}$$



$\{ z \mid z \leq A \} =$

$\{ z \mid z \leq C \} =$

$\{ z \mid z \leq A, z \leq C \} =$

$A \wedge C =$

Verbände

- Damit ein Graph einen unteren Halbverband repräsentiert, muss für je 2 Elemente ein eindeutiges Minimum existieren:

$$x \wedge y = \inf(x, y) = \sup \{ z \mid z \leq x, z \leq y \}$$

$$\inf(B, B) = \sup \{ z \mid z \leq B, z \leq B \}$$

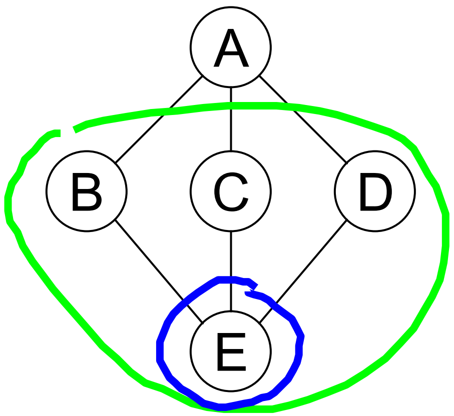
entsprechend für den oberen Halbverband.

$A \leq A$

$C \leq C$

Beispiel:

$$A \wedge C = \inf(A, C) = \sup \{ z \mid z \leq A, z \leq C \}$$



$\{ z \mid z \leq A \} = \{ B, C, D, E \}, A$

$\{ z \mid z \leq C \} = \{ E \}, C$

$\{ z \mid z \leq A, z \leq C \} = \{ E \}, C$

$A \wedge C = \cancel{\sup \{ E \} = E}$

$\sup\{ E, C \} = C$

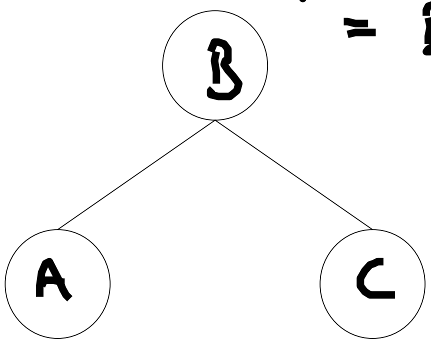
Verbände

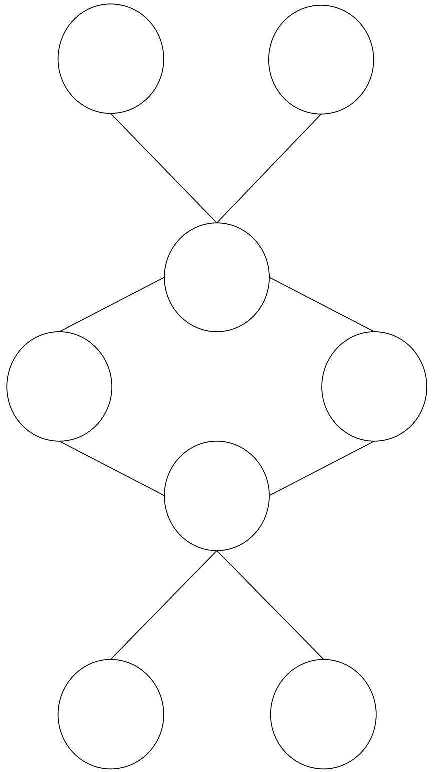
Beispiel:

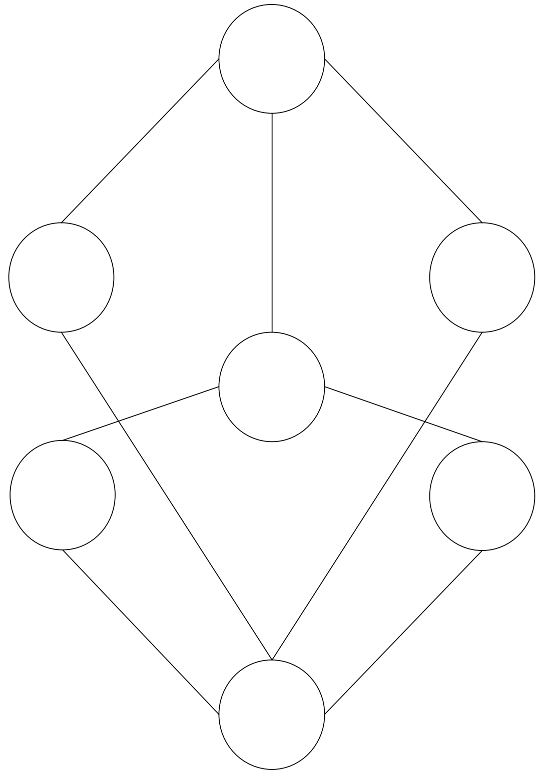
Repräsentieren folgende Graphen Halbverbände bzw. Verbände ?

$\inf(B,B) = \sup\{B,A,C\}$

$= B$

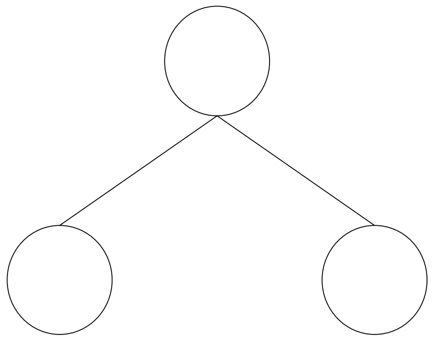




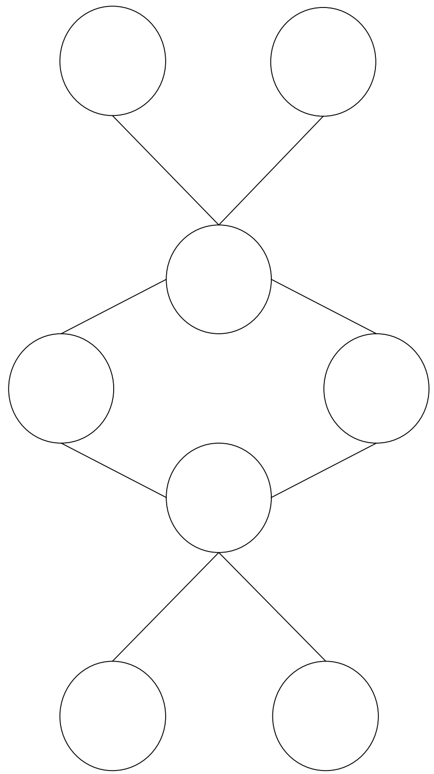


Beispiel:

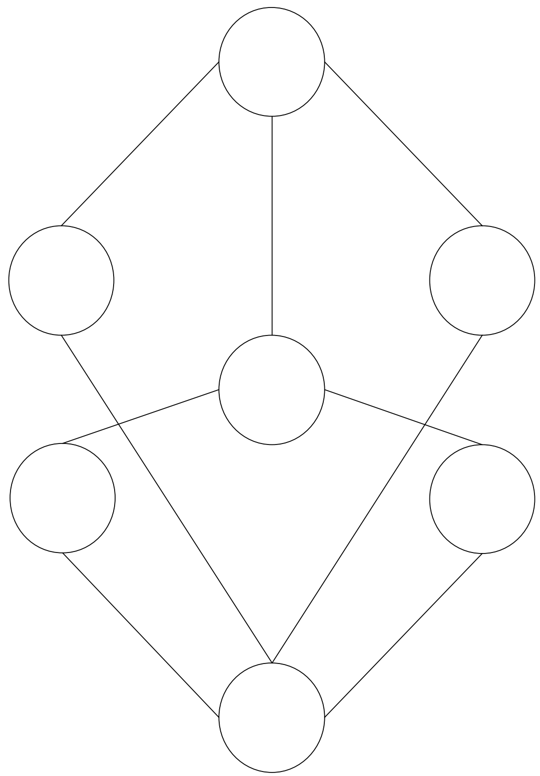
Repräsentieren folgende Graphen Halbverbände bzw. Verbände ?



Oberer Halbverband



nichts



Verband