Kapitel 3b
Termalgebren

Erinnerung: Algebraische Strukturen und Algebren

- Gegeben:
  - Signatur Σ (also Menge von Operationen $\Sigma = \Sigma^{(0)} \cup \Sigma^{(1)} \cup \Sigma^{(2)} \cup \ldots$)
  - Elementaroperanden X
  - Menge $\mathcal{T}$ der korrekten Terme zu Σ und X
  - Menge von Gesetzen (bzw. Axiome) Q, die bedeutungstreue Umformungen $f \to f'$ ($f, f' \in \Sigma$) definieren
    Beispiele: die Halbgruppen- und Monoidgesetze HG1, HG2 (nur bei kommutativen HG), die Gesetze V1-V10 der booleschen Algebra

Das Tripel $\mathcal{A} = (\mathcal{T}, \Sigma, Q)$ bildet eine **algebraische Struktur**, man spricht auch von einer **Abstrakten Algebra**. Dabei gilt für zwei Terme $t, t' \in \mathcal{T}$: $t = t'$ gdw. t nach den Gesetzen Q in t' umgeformt werden kann.

Beispiele:
- Halbgruppen, Monoide, Verbände, Gruppen, Ringe, Körper, Vektorräume, boolesche Algebren
- alle Datenstrukturen der Informatik (**abstrakte Datentypen**)

Erinnerung: Initiale oder Grundtermalgebren

Sei gegeben:
- $\Sigma = (S, F)$ eine Signatur
- $X = (\Sigma_{\varepsilon, s})$, $s \in S$ Familie der zur Signatur gehörigen Elementaroperanden

Grundterm der Sorte $s \in S$:
Term der Sorte s, wobei alle Elementaroperanden nur zur Signatur gehören (d.h. $X_s = \Sigma_{\varepsilon, s}$) für alle Sorten $s \in S$.

Notation: $G_0(\Sigma)$ ist die Menge aller Grundterme über der Signatur Σ.

Beispiel: Betrachte Signatur Σ mit Sorte $\mathbb{N}$ und den Operationen
- 0: $\to \mathbb{N}$
- succ: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$

Dann ist $G_0(\Sigma) = \{0, succ(0), succ(succ(0)), \ldots\}$

Grundtermalgebra (**initiale Algebra**): Σ-Algebra $G = (G_0(\Sigma), \emptyset)$
In der Informatik sind fast alle freien Algebren initiale Algebren

Erinnerung: Anwendung des Homomorphiesatzes

Satz: Sei $\Sigma = (S, F)$ eine Signatur und $\mathcal{A} = (\mathcal{I}, \Phi)$ eine Σ-Algebra. Dann existiert ein Homomorphismus h: $G_0(\Sigma) \to \mathcal{A}$.

Beweis:

- alle Konstanten $c \in \Sigma_0$ gehören zu $\mathcal{I}$, da $\mathcal{A}$ Σ-Algebra
- alle Terme $t = f(t_1,\dots,t_n) \in G_0(\Sigma)$ gehören zu $\mathcal{I}$
- definiere h: $G_0(\Sigma) \to \mathcal{I}$ durch h(t) = t (Identität)
- es gilt h(t)=h(t'), wenn in $\mathcal{A}$ gilt t = t' nach den Gesetzen Φ
  - h induziert eine Äquivalenzrelation $\equiv$ in $G_0(\Sigma)$
- Anwendung des Homomorphiesatzes liefert das Ergebnis
  - $i_h(G_0(\Sigma)/\equiv)$ = Bild(h) ist Unteralgebra von $\mathcal{A}$

- Einsicht: $\mathcal{A}$ kann nur dann mehr Elemente als Bild(h) umfassen, wenn es in $\mathcal{A}$ Konstante gibt, die nicht Bild von Konstanten in $G_0(\Sigma)$ sind

Termalgebren und Relationen: Normalform, Konfluenz

- Gegeben sei eine Grundtermalgebra $G_0(\Sigma)$ und ein Homomorphismus h: $G_0(\Sigma) \to \mathcal{A}$ in eine Σ-Algebra $\mathcal{A}$
- Fragen:
  1. Gibt es in $G_0(\Sigma)/\equiv$ in jeder Äquivalenzklasse [t] = h(t) ein eindeutig bestimmtes Element t_0, die **Normalform** von [t], so, dass man jedes t' $\in$ [t] systematisch auf t_0 abbilden kann, um so die Äquivalenzklasse von t' zu ermitteln?
  2. Kann man die Normalform sogar so festlegen, dass für alle Operationen $\sigma \in \Sigma$ gilt: $\sigma(t_1,\dots,t_n) = t$ führt Normalformen $t_1,\dots,t_n$ in die Normalform t des Ergebnisses über? Man spricht dann von **kanonischer Normalform**.
  3. Ist es bei der Anwendung von Operationen σ, τ, … zur Berechnung der Normalform gleichgültig, in welcher Reihenfolge die Operationen angewandt werden?
     - lautet die Antwort ja, so sagt man, die Algebra $\mathcal{A}$ habe die **Church-Rosser-Eigenschaft** oder die Anwendung der Operationen sei **konfluent**

2.3 Noethersche Induktion

Ziel: Beweis von Aussagen über fundierte Halbordnungen

Sei $(U, \leq)$ fundierte Halbordnung und < zugehörige strenge Halbordnung.

Behauptung: Aussage P(x) ist wahr, falls gilt:

Wenn P(z) wahr für alle z < y, dann ist P(y) wahr.

Beweis: Sei $U_P = \{x \in U \mid P(x) \text{ wahr}\}$

Annahme: $M = U \setminus U_P \neq \emptyset$

⇒ Es gibt minimales Element $m \in M$, weil $(U, \leq)$ fundiert ist

⇒ P(m) ist falsch, weil $m \in M$

⇒ P(z) ist wahr für alle $z \in U$ mit z < m, weil m minimal in M ist

⇒ P(m) ist wahr - **Widerspruch**!

Beobachtung: P(y) muß auch gelten, wenn $\{z \in U \mid z < y\} = \emptyset$

Strukturelle Induktion: Halbordnung der Terme

- gegeben sei eine Termalgebra $\mathcal{A} = (\mathcal{T}, \Phi)$ zur Signatur Σ
- jeder Term $t \in \mathcal{T}$ ist
  - entweder eine Konstante $t = k$
  - oder entsteht aus Konstanten durch sukzessive Anwendung von Operationen $f \in \Sigma$ auf einfachere Terme t_i: $t = f(t_1,\ldots,t_n)$
    - „einfacher": die t_i enthalten weniger Funktionsanwendungen als t
- **Halbordnung auf $\mathcal{T}$: $t' \leq t$, wenn der Term t' als Operand in t vorkommt**
  - $t' = t$
  - oder $t = f(\ldots,t',\ldots)$
  - oder (transitive Hülle) $t = f(\ldots,t'',\ldots)$ und t' ist Operand von t"
- Ein Term t enthält nur endlich viele Funktionsanwendungen (sonst könnte man ihn nicht hinschreiben)
- wenn $t' \leq t$, dann ist t' einfacher als t
- also: **die Halbordnung der Terme ist artinsch (und daher fundiert)**: jede absteigende Kette $\ldots \leq t'' \leq t' \leq t$ bricht nach endlich vielen Schritten ab

3.5 Strukturelle Induktion

Satz (**Prinzip der strukturellen Induktion**):
Sei $\Sigma = (S, F)$ eine Signatur, $\mathcal{A}$ eine Σ-Termalgebra mit Konstanten X.
Alle korrekten Terme $t \in \mathcal{T}$ besitzen die Eigenschaft P(t), wenn gilt:

- P(k) gilt für alle Konstanten $k \in X$
- Für alle Operationen $f: s_1 \times \ldots \times s_n \to s$ gilt:
  Wenn $P(t_1),\ldots,P(t_n)$ für $t_1,\ldots,t_n \in \mathcal{T}$ gilt, dann gilt auch $P(f(t_1,\ldots,t_n))$

Beweis: Anwendung noetherscher Induktion auf die fundierte Halbordnung der Terme

3.5 Strukturelle Induktion

Beispiel: Betrachte Quotientenalgebra zu

- Signatur:
  - 0: $\to \mathbb{N}$
  - succ: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  - plus: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- Axiome:
  - P1: plus(m, 0) = n
  - P2: plus(n, succ(m)) = succ(plus(n, m))
- Es gibt Homomorphismus in das Monoid der natürlichen Zahlen.

Gilt auch in der Quotientenalgebra das Assoziativgesetz ?

2.3 Normalformen und Konfluenz

Ausgangspunkt:

Sei $\mathcal{T}$ = (Σ, →) Semi-Thue-System, so daß ⇒* azyklisch

Beispiele: (modifizierte Kaffeedose)

+ |	→	| +	schwarz schwarz	→	schwarz
+	→	ε	weiß weiß	→	schwarz
			weiß schwarz	→	weiß
			schwarz weiß	→	schwarz

- Warum terminieren diese Semi-Thue Systeme?
- Warum ergibt sich bei der Addition immer dasselbe Ergebnis, aber bei der modifizierten Kaffeedose nicht?

2.3 Normalformen und Konfluenz

Beobachtung:

$\mathcal{T}$ = (Σ, →) terminiert genau dann für alle x ∈ Σ*, wenn ⇒* noethersche Halbordnung ist

Spezialfall: Reduktion von w ∈ Σ* auf Z einer anständigen kontextfreien Grammatik G = (Σ, N, P, Z)

- Produktionen sind terminierend oder rechte Seite ist länger als linke Seite

Aber: Endet Semi-Thue-System immer mit demselben Wort?

In einer Halbordnung ≤ heißt ein Wort w Normalform eines Worts x, wenn es maximal ist, wenn es also kein w' mit w ≤ w', w ≠ w' gibt.

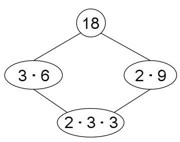
Also ist jedes Wort w mit dem eine Ableitung x ⇒* w endet, auf das also keine weiteren Regeln mehr anwendbar sind, eine Normalform von x

2.3 Beispiel: Faktorzerlegung

Formales System: ({n ∈ N | n > 1}, →) mit

- n → p · q genau dann, wenn n = p · q ist
- ⇒* definiert Halbordnung

Beispiel: Ableitungen von 18:



Beobachtungen:

- alle Wege führen zum selben Ziel (Konfluenz)
- Maximales Element: Primfaktorzerlegung (Normalform)
- Primzahlen selbst sind maximal (irreduzibel)

2.3 Reduktionen bei Grammatiken

Gegeben: kontextfreie Grammatik $G = (\Sigma, N, P, Z)$

Beobachtung:

- Reduktionsbeziehung $\Rightarrow^*$ ist Halbordnung, wenn nicht $A \Rightarrow^+ A$ gilt.
- Z ist Normalform und $w \in L(G)$ genau dann, wenn $w \Rightarrow^+ Z$

Beispiel:

A	→	$F \mid A + F$		a + a	⇒	F + a	a + a	⇒	F + a
F	→	$bez \mid (A)$			⇒	A + a		⇒	A +a
					⇒	A + F		⇒	A + F
					⇒	A		⇒	A + A

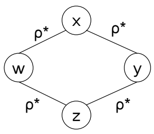
Problem: Es gibt auch andere Normalformen y von w

- $w \Rightarrow^+ y$ ist eine Sackgasse

2.3 Konfluenz

konfluente Relation $\rho \subseteq U \times U$:

Wenn $x\ \rho^*\ w$ und $x\ \rho^*\ y$, dann gibt es ein z mit $w\ \rho^*\ z$ und $y\ \rho^*\ z$



Einsicht: Wenn es für konfluente Relation ρ eine Normalform gibt, dann ist diese eindeutig.

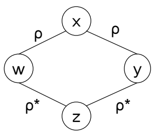
⇒ Noethersche Halbordnung konfluent genau dann, wenn maximales Element einer Kette eindeutig ist.

Problem: Nachweis der Konfluenz erfordert Untersuchung beliebig langer Ketten $x\ \rho^*\ w$ und $x\ \rho^*\ y$

2.3 Lokale Konfluenz

lokal konfluente Relation $\rho \subseteq U \times U$

Wenn $x\ \rho\ w$ und $x\ \rho\ y$, dann gibt es ein z mit $w\ \rho^*\ z$ und $y\ \rho^*\ z$



- Aus Konfluenz folgt lokale Konfluenz
- lokale Konfluenz ist einfacher nachzuweisen

Problem: Reicht lokale Konfluenz aus?

2.3 Diamantenlemma

(*Newman 1942*) Eine noethersche Halbordnung (U, ρ) ist genau dann konfluent, wenn sie lokal konfluent ist.

Beweis: „lokal konfluent" impliziert „konfluent"

Noethersche Induktion auf $\rho^T = \{(x, y) \mid (y, x) \in \rho\}$

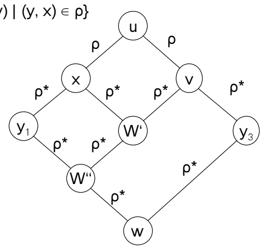
$\Rightarrow \rho^T$ ist artinsch, also fundiert, weil ρ noethersch ist

Es gelte $y_1\ \rho^{T*}\ u$ und $y_3\ \rho^{T*}\ u$

Zu zeigen:

Es gibt w mit $w\ \rho^{T*}\ y_1$

und $w\ \rho^{T*}\ y_3$



2.3 Diamantenlemma

Beweis (Fortsetzung):

- O.b.d.A. sei $y_1 \neq u$ und $y_3 \neq u$, sonst wähle $w = y_1$ bzw. $w = y_3$

  $\Rightarrow$ Es gibt x und v mit $y_1\ \rho^{T*}\ x\ \rho^T\ u$ und $y_3\ \rho^{T*}\ v\ \rho^T\ u$
- ρ ist lokal konfluent

  $\Rightarrow$ es gibt w' mit $w'\ \rho^{T*}\ x$ und $w'\ \rho^{T*}\ v$
- Induktionshypothese für x

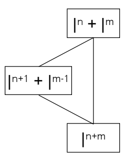
  $\Rightarrow$ Es gibt w" mit $w''\ \rho^{T*}\ y_1$ und $w''\ \rho^{T*}\ w'$
- Induktionshypothese für v (Wege $w''\ \rho^{T*}\ w'\ \rho^{T*}\ v$ und $y_3\ \rho^{T*}\ v$)

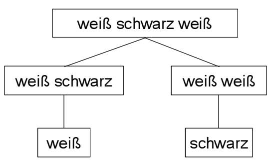
  $\Rightarrow$ Es gibt w mit $w\ \rho^{T*}\ w''$ und $w\ \rho^{T*}\ y_3$

  $\Rightarrow w\ \rho^{T*}\ w''\ \rho^{T*}\ y_1$ und $w\ \rho^{T*}\ y_3$

2.3 Anwendung des Diamantenlemmas

+ |	→	| +	schwarz schwarz	→	schwarz
+	→	ε	weiß weiß	→	schwarz
			weiß schwarz	→	weiß
			schwarz weiß	→	schwarz





3.5 Normalformen in Termalgebren

- **Beispiel** Keller:
  - Definiere $x \prec y$ genau dann, wenn x aus y durch Anwenden eines der Gesetze K1-K4 entsteht.

⇒ x enthält weniger Operationen als y

⇒ $\prec^*$ ist eine noethersche Halbordnung

- $\prec^*$ ist lokal konfluent (Übung)

⇒ Jeder Term der Sorte stack(T) hat eindeutige **Normalform**, da aufgrund des Diamantenlemmas $\prec^*$ konfluent ist.

⇒ Normalformen der Sorte „Keller“
  - enthalten keine der Operationen: pop, top, isEmpty
  - haben die Form: push(…(push(createStack,n_1),…),n_k)
  - repräsentieren Keller

3.5 Normalformen in Termalgebren

- Das Beispiel ist leider nicht beliebig verallgemeinerbar:
  - die durch die Gesetze induzierte Ordnungsrelation $x \prec y$ ist
    - oft nicht noethersch
    - oft nicht konfluent (mehrere oder keine Normalform)
- Beispiele:
  - arithmetische Ausdrücke im Körper der rationalen oder reellen Zahlen
  - Datentypen mit Gesetzen wie Assoziativität, Kommutativität, die die Länge nicht reduzieren

3.5 Hilfskonstruktoren, Konstruktoren, Projektionen

Konstruktoren: Operationen, die in Normalformen vorkommen.

Beispiel: createStack, push

Hilfskonstruktoren: Operationen, die Datenstrukturen verändern, aber nicht in Normalformen vorkommen.

Beispiel: pop

Projektoren: Operationen, die Informationen über eine Datenstruktur berechnen (und ein Ergebnis anderer Sorte liefern)

Beispiel: top, isEmpty

3.5 Undefinierte Werte

Problem: Terme wie top(createStack) und pop(createStack) sind auch Normalformen.
Diese sind jedoch unerwünscht, da in einem leeren Keller kein oberstes Element existiert bzw. entfernt werden kann.

Lösung: Man erklärt *top* und *pop* zu partiellen Operationen und die obigen Terme zu einem Fehler $\perp$ (lies: bottom).

Beispiel: Keller

- Ergänze Menge der Axiome um
  - K5: top(createStack) $= \perp$
  - K6: pop(createStack) $= \perp$

Problem: Sind Werte wie push($\perp$, 3) auch vernünftige Normalformen?
Antwort: Strikte Operationen f erfüllen immer die Gleichung f(…,$\perp$,…) = $\perp$

$\Rightarrow$ Wenn alle Operationen strikt sind, dann sind die Normalformen $\perp$ und push(…(push(createStack, n_1),…),n_k).

Erinnerung: Termersetzungssysteme

Termersetzungsregel $\ell \to r$:
ℓ, r sind Terme gleicher Sorte über einer Signatur Σ mit Variablen V.

Forderung: Alle Variablen, die in ℓ auftreten müssen auch in r auftreten.

Termersetzungssystem:
Menge $\mathcal{E}$ von Termersetzungsregeln $\ell \to r$ über einer Signatur Σ.

Anwendung einer Termersetzungsregel $\ell \to r$ auf Term t:
1. finde Unterterm t' von t, der auf ℓ paßt, d.h. es gibt Substitution σ mit $\ell\sigma$ = t'.
2. ersetze t' durch $r\sigma$
   (entspricht der Anwendung eines Axioms)

Ableitung $t \Rightarrow^* t'$:
t' entsteht aus t durch Anwendung von Termersetzungsregeln.
Direkte Ableitung $t \Rightarrow t'$:
t' entsteht aus t durch Anwendung genau einer Termersetzungsregel.

3.7 Normalformen bei Termersetzungssystemen

Terminaler Term:
- Term t heißt terminal bzgl. des Termersetzungssystem $\mathcal{E}$, wenn keine weitere Regel mehr angewandt werden kann.

Normalform:
- Menge der terminalen Grundterme zu einem Termersetzungssystem $\mathcal{E}$
- Einem vorgegebenen Term t wird ein terminaler Term t' als Normalform zugeordnet, falls existent

Sei gegeben:
- Σ eine Signatur
- $\mathcal{A} = (\mathcal{I}, \Sigma, Q)$ eine abstrakte Σ-Algebra
- Q Axiome, dargestellt durch Gleichungen

Beobachtung:
Wenn alle Gleichungen von links nach rechts gerichtet werden, dann entsteht ein Termersetzungssystem $\mathcal{E}$.

3.7 Normalformen bei Termersetzungssystemen

Eigenschaften von $\mathcal{E}$:

- Wenn $t \Rightarrow^* t'$, dann ist $t \equiv t'$ bzgl. der Axiome Q.
- Wenn $t \Rightarrow^* s$ und $t' \Rightarrow^* s$, dann ist $t \equiv t'$ bzgl. der Axiome Q.
- Wenn $\mathcal{E}$ noethersch und konfluent, dann Normalformen eindeutig
  - ⇒ $t \equiv t'$ kann entschieden werden, indem man die Normalformen von t und t' bestimmt und prüft, ob diese identisch sind.

Beobachtung:

Alle diese Überlegungen erfordern nur den Übergang zur Quotiententermalgebra, nicht aber zu einer konkreten Algebra.

⇒ Man kann bereits vor der Realisierung im Rechner prüfen, ob eine Spezifikation das Gewünschte leistet.

3.7 Korrektheit von Termersetzungssystemen

- partielle Korrektheit
  - R: Termersetzungssystem
    A: Termalgebra (Datenstruktur) der Signatur Σ
  - Eine Termersetzungsregel $t \rightarrow r$ über der Signatur heißt partiell korrekt bzgl. der Termalgebra A, falls für jede Belegung β in A gilt:

    $I_\beta^A[t] = I_\beta^A[r]$
  - R heißt partiell korrekt bezüglich A, falls jede Regel partiell korrekt bezüglich A ist
- vollständige oder totale Korrektheit
  - Ein partiell korrektes Termersetzungssystem R heißt total korrekt bezüglich A, wenn
    - für Grundterme t, mit $t^A \neq \perp$, keine nichtterminierenden Berechnungen existieren
    - für bezüglich R terminale, verschiedene Grundterme t_1, t_2 mit $t_1^A \neq \perp$ und $t_2^A \neq \perp$ stets gilt $t_1^A \neq t_2^A$